FISICA
AL ALCANCE DE TODOS

LA NATURALEZA DEL MAGNETISMO

M. Kagánov
V. Tsukérnik

EDITORIAL MIR MOSCU



FISICA

AL ALCANCE DE TODOS

FISICA AL ALCANCE DE TODOS

М. И. Каганов, В. М. Цукерник

ПРИРОДА МАГНЕТИЗМА

МОСКВА «НАУКА»

FISICA AL ALCANCE DE TODOS

LA NATURALEZA DEL MAGNETISMO

M. Kagánov, V. Tsukérnik

Traducido al español por K. G. Steinberg

EDITORIAL MIR MOSCU



Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

INTRODUCCION. ¿De qué trata este libro?

El título del libro refleja con bastante exactitud el tema a que está dedicado. Trataremos de contar sobre la naturaleza del magnetismo.

Existe un gran apartado de física que lleva el nombre de física de los fenómenos electromagnéticos. Para principios del siglo XX parecía que estaba consumado debido a los trabajos de Faraday y Maxwell. Consumado en el sentido de que quedaron entendidas las leyes principales que regían los campos electromagnéticos, es decir, estuvieron escritas las ecuaciones correspondientes, y la tarea de las generaciones venideras consiste en buscar las soluciones cada vez más sofisticadas de estas ecuaciones. Pero paulatinamente iba revelándose que ni hablar se podía de una consumación. La teoría de los fenómenos electromagnéticos, al igual que la mecánica, se vio sujeta a un sustancial desarrollo debido a la portación a éstas de ideas cuánticas. Actualmente somos más cuidadosos en nuestros juicios acerca del carácter consumado de uno u otro apartado de la física. Toda ciencia de desarrollo bastante avanzado no sólo formula los principios básicos sobre los cuales se asienta, sino también los límites de aplicabilidad de estos principios. La mecánica cuántica y la teoría del electromagnetismo que forman la base del entendimiento de la estructura y las propiedades de la naturaleza que nos rodea pueden aplicarse a la investigación de un enorme conjunto de fenómenos, si no se profundiza en las estructuras subatómicas. En este caso no hay fundamento para poner en tela de juicio la fiabilidad de las leyes de la física que conocemos ya que nos encontramos dentro de los márgenes de su aplicabilidad.

El concepto básico de la física de los fenómenos electromagnéticos es el campo electromagnético. El campo electromagnético permanente que no depende del tiempo se descompone en dos: el campo eléctrico y el campo magnético. Estos campos son muy disímiles. Sin embargo, un campo electromagnético que depende del tiempo no es sino la unidad de los campos eléctrico y magnético. En la onda electromagnética la energía está concentrada ora en el campo eléctrico,

ora en el magnético, a semejanza de la oscilación del péndulo cuya energía se redistribuye entre la potencial y la cinética.

El campo electromagnético es perceptible a los órganos de los sentidos del hombre solamente en el caso de que los campos eléctrico y magnético oscilen con enorme frecuencia. Si la frecuencia de oscilación del campo electromagnético se encuentra en el intervalo desde $4 \cdot 10^{14}$ hasta $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz, entonces percibimos estas oscilaciones como luz. En la escala de frecuencias el campo electromagnético visible ocupa un tramo insignificante. Pero es imposible concebir qué sería si no hubiera existido este tramo, pues la mayor parte de la información acerca del mundo circundante la obtenemos con la ayuda de la vista. «Más vale ver que creer» —la razón de este sabio proverbio popular puede corroborarse por los cálculos modernos de la teoría de la información.

Los campos estáticos (tanto el eléctrico como el magnético) no se perciben en absoluto por el hombre, ya que éste no tiene el órgano correspondiente. Las aves migratorias, al parecer, sí que perciben el campo magnético, pero incluso en el caso de ser así no tenemos la posibilidad de figurarnos lo que éstas sienten. Sea como fuere, la ausencia en el hombre de un órgano que perciba los campos eléctrico y magnético, por supuesto, no nos priva de la posibilidad de aclarar si existe o no tal campo en un punto dado del espacio. Y no sólo de descubrir la presencia del campo, sino también medirlo. Son los instrumentos los que nos ayudan a descubrir y medir los campos eléctrico y magnético. A pesar de la enorme variedad de instrumentos empleados, la mayoría*) de ellos se basa en el siguiente hecho físico: si en un punto dado del espacio el campo eléctrico es distinto de cero e igual a E, entonces, sobre la carga de magnitud q actúa la fuerza F_{el} igual a qE; ahora bien, si es el campo magnético H el que es distinto de cero, entonces, sobre la carga q que se mueve con una velocidad v actúa una fuerza F_M igual a $\frac{q}{c}[vH]$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, cuyo valor es de $3 \cdot 10^{10}$ cm/s (fig. 1). Finalmente, si ambos campos, tanto el eléctrico como el magnético, no son iguales a

*) Hemos escrito «la mayoría» y no «la totalidad» por cuanto hay métodos de medición de los campos magnéticos basados en la interacción del campo magnético con los momentos magnéticos atómicos y subatómicos (véase más adelante) y no con las cargas.

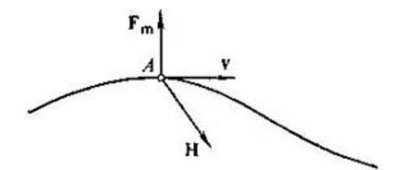


FIG. 1. *Fuerza de Lorentz F_M que actúa sobre la carga $q < 0$ en el punto A de la trayectoria; v, la velocidad de la partícula; H, el campo magnético.*

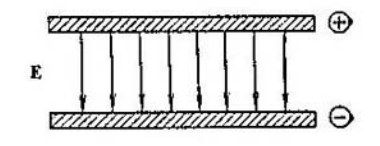


FIG. 2. *Líneas de fuerza del campo eléctrico entre las armaduras de un condensador plano.*

cero, la fuerza que actúa sobre la carga q será

$$F = F_{el} + F_M = q\left(E + \frac{1}{c}[vH]\right). \qquad (1)$$

Esta fuerza lleva el nombre de *fuerza de Lorentz.*

Las letras $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{v}$ se dan en negrilla. Esto significa que las magnitudes que éstas designan son vectores.

Recalquemos una vez más: los campos eléctrico y magnético son vectores. Tal es su naturaleza. Este hecho fue entendido y formó la base de la descripción del campo electromagnético, encontrando su consumación al formularse las célebres ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones son tan famosas o, mejor dicho, tan importantes, que su descubrimiento se considera con plena razón como un acontecimiento de trascendencia histórica.

No es difícil crear un campo eléctrico, ni tampoco uno magnético. El primero llena el espacio entre las armaduras del condensador cargado (fig. 2), y el segundo rodea el conductor por el cual fluye la corriente (fig. 3).

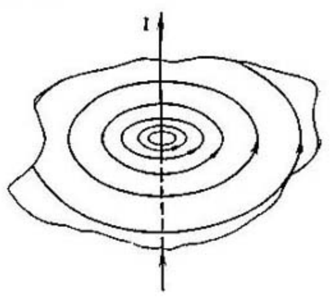


FIG. 3. *Campo magnético alrededor de un conductor rectilíneo con corriente J. Las líneas de fuerza magnéticas están representadas en el plano.*

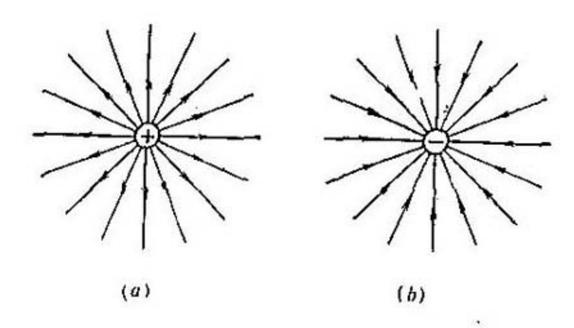


FIG. 4. *Líneas de fuerza del campo eléctrico de una carga puntual inmóvil q: a) $q > 0$; b) $q < 0$.*

Los campos vectoriales se representan por medio de líneas de fuerza cuya densidad es tanto mayor cuanto mayor es la magnitud del campo, y su dirección coincide con la del vector (fig. 4).

Hemos reproducido un dibujo (véase la fig. 4, *a*) tomado de un manual de física, demostrando que la carga (en la figura es una bolita de radio pequeño) es la fuente del campo eléctrico. Si la carga es positiva, las líneas de fuerza del campo eléctrico parten de dicha bolita y se alejan al infinito enrareciéndose gradualmente. Si la carga es negativa (véase la fig. 4, *b*), las líneas de fuerza entran en la carga. Estos dibujos son muy importantes. Combinándolos se puede comprender cuál es la estructura del campo eléctrico estático en todos los casos prácticamente importantes.

Un apartado especial de la teoría del electromagnetismo —la electrostática— se ocupa del estudio del campo eléctrico estático, su distribución en el espacio y penetración en las sustancias de distinta naturaleza. La electrostática se basa en el hecho que encontró su expresión gráfica en la fig. 4, *a*, *b*: las fuentes del campo eléctrico son las cargas eléctricas.

De ordinario, para mostrar la distribución del campo eléctrico en torno a la carga se hace uso de una bolita pequeña, pero en todos los sentidos macroscópica (es decir, que consta de miles de millones de átomos). El cálculo y las reiteradas comprobaciones experimentales evidencian que la intensidad del campo electromagnético disminuye a medida que se aleja de la carga q inversamente proporcional al cuadrado

de la distancia hasta esta carga (la ley de Coulomb)*)

$$E = \frac{q}{r^2}. \quad (2)$$

Es asombroso que esta ley actúa no sólo en el *macro*, sino también en el *micromundo*. Rutherford, al estudiar la dispersión de las partículas alfa en la sustancia, estableció que el núcleo atómico (¡un solo núcleo!) engendra en su alrededor el campo eléctrico que obedece la ley de Coulomb (2). Habitualmente, al relatar sobre los experimentos de Rutherford se subrayaba el hecho de que gracias a estos experimentos había sido descubierto el núcleo atómico, un coágulo de materia cargado positivamente, que es cien mil veces menor que el átomo. Sin duda, eso es el resultado principal. Sin embargo, no es menor la importancia del propio hecho de comprobar la ley de Coulomb hasta las distancias del orden de 10^{-13} cm. Piénsenlo bien, una simple ley de la proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia es válida también para las distancias conmensurables con las escalas del hombre (centímetros, metros), como asimismo para las de 10^{-13} cm. Y si añadimos que no hay razones para dudar del justo carácter de la fórmula (2) al aumentar las distancias, digamos, hasta magnitudes cósmicas, entonces, la universalidad de la ley de Coulomb sorprende en extremo.

A la ley de Coulomb se le puede dar una forma algo distinta diciendo que la energía potencial U de la carga q_2 es distinta de cero e igual a q_1q_2/r si en el origen de coordenadas se tiene la carga q_1. La energía puede determinarse con una precisión de hasta el sumando constante. Aquí, este último se ha elegido de modo que a una distancia infinita de la carga q_1 (para $r \to \infty$) $U = 0$. En este caso el signo de la energía potencial U determina qué tipo de acción tenemos: atracción ($U < 0$) o repulsión ($U > 0$).

En la física atómica, la forma «energética» de la ley de Coulomb se aplica más a menudo que la forma de «fuerza».

*) El lector quizá se haya acostumbrado a una formulación algo distinta de la ley de Coulomb: la fuerza de interacción F_{coul} entre dos cargas q_1 y q_2 es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F_{coul} = \frac{q_1q_2}{r^2}.$$

Si las cargas tienen el mismo signo, éstas se repelen, y si son de signo diferente, se atraen.

Las investigaciones de la estructura atómica de la sustancia descubrieron las fuentes microscópicas de los campos eléctricos en la naturaleza. Estas resultaron ser los electrones y los protones. Sus cargas son de igual magnitud y de signo opuesto. Se suele considerar que la carga del protón e_p es positiva, y la del electrón e, negativa:

$$e_p = 4{,}8\cdot 10^{-10}\ \mathrm{g}^{1/2}\cdot\mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1} = -e. \qquad (3)$$

Subrayemos: el electrón y el protón no tienen, meramente, cargas microscópicas, es decir, pequeñas, sino ínfimas, elementales. En la naturaleza no se han detectado partículas con carga eléctrica fraccionaria (en unidades e)*).

¿Es grande o pequeña la carga del electrón (protón)? La física no admite semejante planteamiento abstracto de la cuestión. Siempre es necesario añadir: «en comparación con qué». Si la carga se considera como medida de interacción entre las partículas, entonces es enorme. En efecto, comparemos la fuerza de repulsión entre dos protones, condicionada por la ley de Coulomb

$$F_{\mathrm{coul}} = -\frac{e_p^2}{r^2},$$

con la fuerza de atracción debida a la ley de la gravitación universal

$$F_{\mathrm{gr}} = \gamma\,\frac{m_p^2}{r^2}.$$

Esta comparación es fácil de realizar ya que tanto una como otra fuerza disminuyen según la misma ley, o sea, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas. La masa del protón $m_p = 1{,}7\cdot 10^{-24}$ g y la constante γ en la ley de la gravitación universal es igual**) a $6{,}7\ \times$ $\times\ 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. La relación $F_{\mathrm{coul}}/F_{\mathrm{gr}} \approx 4\cdot 10^{42}$. Las fuerzas eléctricas, ¡más que en 42 veces! superan las gravita-

*) En los últimos tiempos se habla y se escribe mucho sobre los quarks, partículas de las cuales constan los nucleones: protones y neutrones. Incluyen varias especies con cargas $\pm\frac{1}{3}e$ y $\pm\frac{2}{3}e$. Sin embargo, por lo visto, en estado libre (no en la composición de los nucleones) no pueden existir, ¡por cierta razón esto les está prohibido!

**) *Problema* 1. Calcule γ valiéndose del valor de la aceleración de la fuerza de gravedad en la Tierra, igual a 9,8 m/s², aproximadamente, y de los datos sobre nuestro planeta (estos últimos se pueden tomar de un manual o enciclopedia).

cionales. Precisamente por esta razón nunca se piensa en las fuerzas gravitacionales cuando se resuelven problemas de la física atómica.

¿Por qué, entonces, si las fuerzas eléctricas son tan grandes no se deben tener en cuenta en la vida cotidiana y en la técnica?

El asunto reside en que en el medio ambiente hay muchas cargas libres (electrones, iones). Apenas en algún sitio haya surgido una carga, en el acto, las cargas libres de signo correspondiente se verán atraídas, neutralizándola. En la mayoría de los casos tenemos que tratar con los cuerpos neutros (no cargados). En cambio, las fuerzas de gravedad no se pueden neutralizar. Estas aumentan con el incremento de la masa y precisamente para los cuerpos macroscópicos, en particular, para los cósmicos, son las más esenciales.

Pero el papel de la carga no se reduce a describir la interacción de las partículas cargadas. Indudablemente, todo el mundo sabe que la partícula cargada, en determinadas condiciones, emite ondas electromagnéticas. Precisamente una partícula *cargada* y no neutra. De medida de capacidad de emisión sirve la carga o, mejor dicho, la relación adimensional $e^2/\hbar c$ (el lector debe dar crédito a lo expuesto). Aquí, $\hbar$ es la célebre constante de Planck de la cual no puede prescindir ninguna fórmula de la física cuántica. El valor de $\hbar$ es de 10^{-27} $g \cdot cm^2 \cdot s^{-1}$, aproximadamente, de modo que la relación $e^2/\hbar c \approx 1/137$. Esta relación con frecuencia se denomina 1/137*. El hecho de que $e^2/\hbar c \ll 1$ demuestra que la carga electrónica, en cierto sentido, es pequeña. De este modo resulta que en un sentido la carga es grande y en otro pequeña. No se puede hacer nada, así es el mundo.

Ahora prestemos atención al campo magnético.

En la naturaleza las cargas magnéticas no se han descubierto.

---

*) Trataremos de rogar no muy a menudo al lector, de que nos crea de palabra. Pero, a decir verdad, no podremos prescindir de ello. A los que hayan leído algún libro de divulgación científica dedicado a la mecánica cuántica es posible que les satisfaga el siguiente desciframiento de esta relación. 1/137 es la relación del «radio» del electrón e^2/m_ec^2 a la longitud de onda comptoniana $\hbar/m_ec$ (m_e es la masa del electrón, igual a 10^{-27} g, aproximadamente). Es difícil decir si lo expuesto explica algo, pero, en todo caso, ayuda a tratar las magnitudes importantes en la física atómica y, principalmente, enseña cómo pueden obtenerse combinaciones adimensionales compuestas de constantes universales.

En 1931, uno de los fundadores de la mecánica cuántica, Dirac, expresó su convicción de que las cargas magnéticas debían existir en la naturaleza. Les dio el nombre de *monopolos*. En caso de existir éstos, el mundo sería más simétrico, y la teoría del electromagnetismo, más bella. Los científicos dedicaron muchos esfuerzos a la búsqueda de estas partículas hipotéticas. Varias veces aparecieron comunicaciones sensacionales sobre su descubrimiento que, más tarde, se refutaron. El monopolo no fue encontrado.

Sin embargo, en la naturaleza existen fuentes microscópicas del campo magnético. En uno de los primeros capítulos hablaremos sobre ellas detalladamente.

Ahora podemos relatar brevemente el contenido de este libro.

En primer lugar, como acabamos de decir, se exponen las fuentes microscópicas del campo magnético.

En segundo lugar, después de explicar que en calidad de fuentes microscópicas del campo magnético (al igual que del eléctrico) sirven los electrones y los protones, así como también los neutrones (aunque es cierto que alrededor de éstos no hay campo eléctrico, lo cual lo atestigua su propio nombre), contaremos por qué no todos los cuerpos macroscópicos, ni mucho menos, son fuentes macroscópicas del campo magnético.

En tercer lugar, trataremos de esclarecer por qué distintos cuerpos se comportan de manera diferente al someterlos a la acción del campo magnético.

En cuarto lugar, nos referiremos detalladamente a los cuerpos que suelen denominarse *magnéticos*. Entre ellos ocupan un lugar importante los imanes, o *ferromagnéticos*, o sea, las fuentes macroscópicas del campo magnético.

Esta enumeración no agota el tema del libro. No contaremos nada, o casi nada, sobre el magnetismo nuclear; no tocaremos, ni en el más mínimo grado, el problema del origen del campo magnético de la Tierra y otros planetas; haremos caso omiso de los problemas sugestivos de la investigación de los campos magnéticos en el espacio cósmico.

Sentimos remordimiento por abstenernos de hablar sobre el campo magnético de la Tierra, ya que precisamente la utilización del magnetismo terrestre con fines de navegación (brújula) fue la primera aplicación práctica de las propiedades magnéticas en la historia de la civilización. Y aunque, lamentablemente, faltan criterios rigurosos de evaluación de los inventos más importantes, es evidente que

todo el mundo coincidirá en que la brújula —la aguja magnética que gira libremente— es uno de los inventos más importantes de la humanidad.

Los autores se consuelan recordando la sabia sentencia de Kozma Prutkov*): «Es imposible abarcar lo inabarcable». En efecto, ¡es imposible hacerlo; Y el magnetismo es tan inagotable como la naturaleza.

El presente libro, al igual que todos los otros de la pequeña biblioteca «Cuanto», está destinado a los alumnos de los últimos años de la secundaria. Puede ser que parezca algo más compleja que sus «colegas» de la biblioteca.

A menudo, a los lectores les dejan amedrentados las dificultades matemáticas. Pensamos en ello, pero no pudimos evitar el empleo de los vectores y de las operaciones con éstos, así como del concepto de función, su derivada y la integral de ésta. No recurrimos a otras operaciones matemáticas más complicadas. Especialmente, sacamos algunas operaciones matemáticas para incluirlas en los problemas. Los lectores quienes resolverán los problemas comprenderán mucho más a fondo lo leído que aquellos quienes postergarán su resolución hasta más tarde. Al final del libro añadimos la clave para la resolución de los problemas y esperamos que ésta prestará su servicio al lector en la comprensión de aquéllos. Pero lo principal que nos inquieta (en el sentido de encontrar contacto con el lector) no son las dificultades matemáticas. Según nuestro parecer, la principal dificultad que acecha al lector es la abundancia de nuevos conceptos físicos.

Tratamos de aclarar la mayoría de los mismos en el texto y en notas al pie; si se han quedado algunos sin explicar, pedimos dispensarnos y nos agradará mucho si los lectores se toman el trabajo de comunicárnoslo a través de la Editorial. Naturalmente, agradeceremos todas las observaciones que surjan al leer el libro y esperamos que, si la editorial considera conveniente reeditarlo, trataremos de tener en cuenta aquellas de las observaciones con las que estemos de acuerdo.

---

*) Seudónimo literario colectivo de tres escritores rusos de los años 50—60 del siglo pasado (A. K. Tolstoi y hermanos Zhemchúzhnikov) que publicaron bajo este nombre parodias y aforismos satíricos. *(N. del T.)*

Capítulo 1

IMANES ELEMENTALES

§ 1. DIPOLOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

La estructura del campo eléctrico creado por una carga puntual y la estructura del campo magnético alrededor de un conductor fino por el cual fluye la corriente son tan disímiles que no se le ocurre a uno buscar analogía alguna entre éstos. Pero no nos apresuremos.

Examinemos el sistema de dos cargas eléctricas iguales por su magnitud y opuestas por el signo que están dispuestas a una distancia d una de la otra (fig. 5). La intensidad del campo eléctrico creada por este sistema en un punto arbitrario de la línea trazada a través de ambas cargas es igual a

$$E = \frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+d)^2}. \qquad (1.1)$$

Hemos sumado, simplemente, las intensidades de los campos de dos cargas puesto que ambos vectores están dirigidos según una recta. En ello consiste la ventaja de los puntos situados de una manera simétrica, o sea, de los puntos sobre una línea que pasa a través de las cargas. Supongamos que este punto se encuentra lejos del sistema de cargas: $r \gg d$. En este caso

$$E = q\frac{2dr + d^2}{r^2(r+d)^2} \approx \frac{2qd}{r^3}. \qquad (1.2)$$

A grandes distancias de las cargas q y $-q$ la intensidad del campo eléctrico disminuye con mayor rapidez que la del

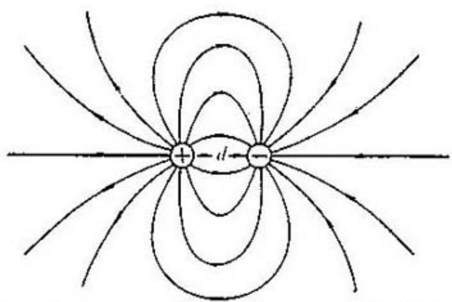


FIG. 5. *Líneas de fuerza del campo de un dipolo eléctrico.*

campo eléctrico engendrado por cada carga separadamente. La magnitud $p = qd$ se denomina *momento eléctrico dipolar* y el sistema de dos cargas iguales por su magnitud pero de signo contrario lleva el nombre de *dipolo*. El momento dipolar es un vector, con la particularidad de que se admite considerar que éste está dirigido de la carga negativa a la positiva:

$$p = qd. \tag{1.3}$$

El momento dipolar define el campo eléctrico del sistema neutro de dos carges —del dipolo— a unas distancias grandes en comparación con la que separa las cargas.

Al sumar las intensidades de los campos de dos cargas, guiándose por las reglas de adición de los vectores, en un punto arbitrario, pero, claro está, lo suficientemente alejado de las cargas (es decir, teniendo en cuenta la condición $r \gg d$), se puede obtener*)

$$E(r) = \frac{3(pn)n - p}{r^3}; \quad n = \frac{r}{r}. \tag{1.4}$$

Valiéndonos de la fórmula (1.4) tracemos las líneas de fuerza que representan el campo del dipolo (véase la fig. 5). Si no es de interés la estructura del campo a distancias del orden de dimensiones del dipolo o menores, el dipolo puede representarse como un punto (o, mejor dicho, como una flecha de pequeño tamaño, ya que el dipolo es vector). Desde el punto de vista del observador que se encuentra bastante lejos del dipolo, los comienzos y los finales de las líneas de fuerza coinciden.

ahora imagínense, tan sólo por un instante, que es imposible separar las cargas, es decir, que en la naturaleza no existen cargas libres, que sólo las hay combinadas. Entonces, como es lógico, precisamente los dipolos se convierten en fuentes elementales (las más sencillas) del campo eléctrico.

Para que los dipolos determinen *por completo* los campos eléctricos que nos interesan hay que exigir que sean microscópicamente pequeños, digamos, tales como el átomo o, incluso, menores. Entonces, cualquier distancia macroscópica será grande (en comparación con las dimensiones del dipolo), y las fórmulas (1.2) y (1.4), absolutamente exactas.

El carácter neutro del sistema de cargas, o sea, la igualdad de las cargas positivas y negativas, puede comprobarse

*) *Problema* 2. Deduzcan la fórmula (1.4).

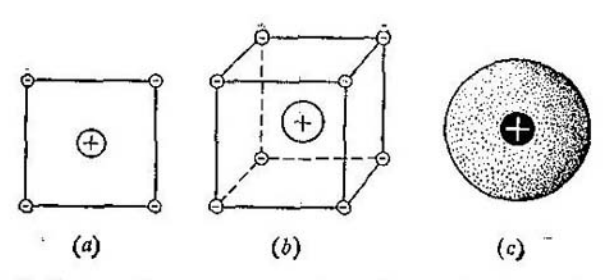


FIG. 6. *Sistemas de cargas con momento eléctrico dipolar igual a cero: a) las cargas negativas $-q$ se encuentran en los vértices del cuadrado, y la carga positiva $+4q$ en su centro; b) análogamente para el caso de un cubo; en su centro se encuentra la carga $+8q$; c) en el centro de la esfera se halla la carga positiva Q, y la carga negativa $-Q$ está distribuida uniformemente por la esfera.*

basándose en el comportamiento del campo eléctrico lejos del sistema. El campo eléctrico alrededor del sistema neutro disminuye a medida que se aleja de éste a una distancia r con mayor rapidez que $1/r^2$. También se puede hablar de sistemas neutros de dipolo, es decir, de sistemas cuyo momento de dipolo es igual a cero. Lejos del sistema de este tipo el campo eléctrico disminuye más rápidamente que $1/r^3$. La fig. 6 representa varios sistemas de cargas con el momento dipolar nulo*).

La existencia del momento dipolar en el sistema de cargas es un testimonio de la asimetría en la distribución de las cargas.

Por supuesto, no es obligatorio razonar de qué sería si no hubieran existido las cargas libres, pero es que sí sabemos que las cargas *magnéticas*, en efecto, no existen en la naturaleza.

En búsqueda de las fuentes elementales del *campo magnético* examinemos la corriente circular, o sea, hablando simplemente, un anillo de alambre de área S por el cual fluye la corriente (tomemos su intensidad igual a J). Para mayor sencillez y partiendo de las razones de simetría calcularemos el campo magnético en un punto situado en la recta perpendicular al plano del circuito (anillo) y que pasa a través de su centro (fig. 7). Repartimos el circuito en por-

*) *Problema* 3. Calculen el campo lejos de dos dipolos antiparalelos iguales y dispuestos a una distancia l uno de otro y perpendicularmente a la línea que los une.

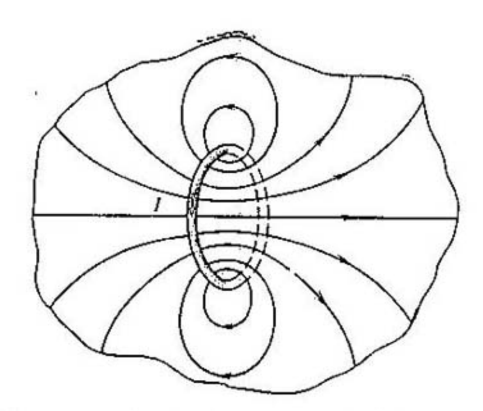


FIG. 7. *Campo magnético de la corriente cerrada J que circula por un anillo plano. Las líneas de fuerza magnéticas se representan en el plano perpendicular al anillo.*

ciones pequeñas de longitud Δl. De acuerdo con la ley de Biot — Savart, la intensidad del campo magnético creado por una porción es igual a

$$\Delta H = J\frac{\Delta l}{cr^2}.$$

La determinación de r queda clara de la fig. 7.

Al sumar los campos creados por distintas partes del anillo hallaremos:

$$H = \frac{2JS}{cr^3}. \quad (1.5)$$

La fórmula obtenida se parece mucho a la (1.2). Esto da razones para llamar la combinación

$$\frac{JS}{c} = M_{\text{corr}} \quad (1.6)$$

magnitud del *momento magnético dipolar de corriente circular*. Y en el caso de asignar al momento magnético dipolar una dirección que coincida con la perpendicular al plano de la corriente circular (el signo se elige por la regla del sacacorchos), entonces, con la ayuda del vector M_{corr} (*dipolo magnético*), el campo magnético engendrado por la corriente

circular se expresa con la fórmula completamente análoga a la (1.4):

$$H(r) = \frac{3(M_{corr}n)n - M_{corr}}{r^3}. \qquad (1.7)$$

Para deducir esta fórmula hace falta saber adicionar los campos magnéticos ΔH originados por las distintas porciones Δl del circuito, teniendo en cuenta el carácter vectorial de los campos sumados.

La coincidencia (con una precisión de hasta las designaciones literales adoptadas) de las fórmulas (1.4) y (1.7) demuestra que el campo eléctrico creado por dos cargas de signo contrario y el campo magnético engendrado por la corriente circular tienen una estructura totalmente idéntica, a menos si no se toma en cuenta el campo inmediato a las cargas o al anillo con corriente. Mientras tanto, en los casos límites de cargas dispuestas infinitamente cerca o de radio de anillo infinitamente pequeño, la dependencia de los campos respecto a las coordenadas es idéntica por completo.

De este modo, el dipolo magnético puede existir sin que haya necesidad de «inventar» para ello cargas magnéticas. El dipolo magnético se realiza por el movimiento de una carga eléctrica ordinaria.

Para no entusiasmarnos demasiado por la semejanza entre los dipolos eléctrico y magnético, prestemos atención a la profunda diferencia entre estos vectores.

En primer término, realicemos el experimento mental representado en la fig. 8, reflejando en el espejo ambos dipo-

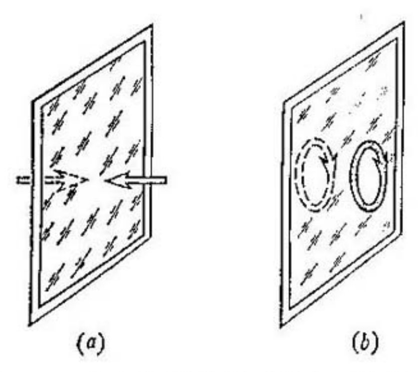


FIG. 8. *Imagen especular: a) del dipolo eléctrico; b) del dipolo magnético.*

los: la dirección del dipolo eléctrico resultará invertida, mientras que la del dipolo magnético, no. En segundo término, transformemos instantáneamente la marcha normal del tiempo en marcha inversa (ésta operación, posible tan sólo «en el papel», lleva el nombre de inversión del tiempo). En este caso al dipolo eléctrico no le sucederá nada, mientras que el magnético cambiará su signo: por cuanto durante la inversión del tiempo todas las partículas se moverán en dirección contraria, en consecuencia, la corriente J cambiará de signo.

§ 2. RELACIÓN GIROMAGNÉTICA

Existe una relación simple entre el momento magnético M_{corr} y el momento mecánico de la cantidad de movimiento de las partículas cargadas L. Para establecer esta relación transformemos la expresión (1.6) para el momento magnético M_{corr}. Por definición, la intensidad de la corriente J es $(q/2\pi R)\, v$. En efecto, $q/2\pi R$ es la magnitud de la carga correspondiente a la unidad de longitud del conductor, y la velocidad v es el camino recorrido por la carga por unidad de tiempo. Puesto que $S = \pi R^2$, resulta

$$M_{corr} = \frac{qvR}{2c}. \tag{1.8}$$

Por otra parte, el momento de la cantidad de movimiento L del sistema examinado es igual a

$$L = m_q v R, \tag{1.9}$$

donde m_q es la masa de las cargas en movimiento.

Al comparar (1.8) y (1.9), tenemos

$$\frac{M_{corr}}{L} = \frac{q}{2m_q c}. \tag{1.10}$$

En esta forma, dicha relación no es mejor que la (1.6) que vincula el momento magnético con la intensidad de la corriente J. Sin embargo, si recordamos que la corriente en el conductor no es sino un flujo de electrones, queda claro que $q = Ne$ y $m_q = m_e N$, donde N es el número de electrones móviles del conductor (electrones de conducción). Entonces, obtenemos a partir de la (1.10)

$$\frac{M_{corr}}{L} = \frac{e}{2m_e c}. \tag{1.11}$$

La relación entre dos magnitudes macroscópicas (el momento magnético del anillo con corriente y el momento de la cantidad de movimiento de los electrones en éste) resultó igual a la combinación de las magnitudes que caracterizan los portadores microscópicos de la carga en el conductor. La relación $\gamma = M_{corr}/L$ recibió el nombre de *relación giromagnética.*

La expresión (1.11), obtenida al analizar el movimiento de los electrones por el anillo, queda válida cualquiera que sea el movimiento realizado por los electrones. *Si el momento mecánico de este movimiento es igual a L, su momento magnético será igual a* $M = L\frac{e}{2m_ec}L$.

En adelante tendremos que precisar esta afirmación. Resultó que los electrones de por sí, incluso los inmóviles, son fuentes del campo magnético, es decir, constituyen una especie de dipolos magnéticos microscópicos. Pero para cierto rato fingiremos no notarlo.

Con frecuencia, la relación giromagnética se mide en magnitudes $\frac{e}{2m_ec}$. En el caso examinado por nosotros ésta debe considerarse igual a la unidad. Si hubieran sido los iones los que transportaran la corriente en el conductor, y no los electrones, la relación giromagnética sería miles de veces menor. Es difícil figurarse una relación giromagnética mayor que la unidad: ¡pues los electrones son las partículas más ligeras que tienen carga!

§ 3. ¿EXISTEN FUENTES ELEMENTALES DEL CAMPO MAGNÉTICO? HIPÓTESIS DE AMPÈRE

De esta forma, la corriente circular o, como suele decirse, el lóbulo de corriente es un dipolo magnético, o sea, una fuente del campo magnético. ¿Pero existen tales lóbulos en la naturaleza? Y si existen, ¿cuál es su naturaleza?

Del curso escolar se conoce la hipótesis de Ampère acerca de las corrientes moleculares. De acuerdo con dicha hipótesis, inusitadamente audaz para su época (Ampère vivió desde 1775 hasta 1836) en el seno de las moléculas y los átomos fluyen corrientes eléctricas, es decir, los átomos y las moléculas son lóbulos de corriente y, por lo tanto, dipolos magnéticos. En esencia, la hipótesis de Ampère encontró bri-

llante confirmación cuando fue entendida la estructura electrónica del átomo. Se confirmó en el sentido de que efectivamente los electrones que se mueven alrededor de los núcleos atómicos engendran corrientes eléctricas, mientras que los lóbulos de corriente engendran el campo magnético*).

Sin embargo, si estas palabras se entienden al pie de la letra, permaneciendo sobre la base de las ideas clásicas (no cuánticas, y en los tiempos de Ampère no existían otras), se debe llegar a la conclusión de que en la naturaleza no hay imanes *elementales*, fuentes *mínimas* del campo magnético. Analicemos el átomo más simple, el de hidrógeno. En éste un solo electrón gira alrededor del protón, con la particularidad de que, de acuerdo con las leyes clásicas del movimiento, el electrón se desplaza por una elipse (en el caso particular, por una circunferencia; para mayor sencillez nos limitaremos solamente a este caso).

La igualdad de las fuerzas centrífuga y culombiana establece la relación entre el radio a de la órbita del electrón y su velocidad v:

$$\frac{e^2}{a^2}=\frac{m_e v^2}{a},$$

o bien

$$\frac{e^2}{a}=m_e v^2. \qquad (1.12)$$

La energía total ε del electrón es la suma de las energías potencial y cinética:

$$\varepsilon=-\frac{e^2}{a}+\frac{m_e v^2}{2}=-\frac{e^2}{2a},$$

---

*) He aquí un breve fragmento del artículo de Albert Einstein publicado en 1915. Este pasaje nos señalará cuán audaz fue la hipótesis de Ampère para su época y, además, ayudará a comprender el hecho de que una hipótesis la cual, al parecer, explica los hechos experimentales, por regla general —si es lo suficientemente seria— plantea nuevos problemas profundos.

«La teoría de Ampère en su forma electrónica contemporánea (se entiende, por supuesto, contemporánea para aquel entonces. —Los autores) se encuentra con la dificultad de que, de acuerdo con las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell, los electrones que realizan movimiento circular deben perder su energía cinética por efecto de la emisión, de modo que las moléculas o los átomos deben perder con el tiempo'—o ya han perdido— su momento magnético, *lo que, en realidad, claro que no ocurre* (la cursiva es nuestra. —Los autores). A. Einstein, Recopilación de obras científicas, t. III, pág. 360, Moscú, 1967 (ed, en ruso).

o bien

$$a = -\frac{e^2}{2\varepsilon} \qquad (1.13)$$

De este modo, la energía ε del electrón define unívocamente el radio de su órbita (que no cause asombro el signo menos, pues la energía del electrón en el átomo es negativa; el sumando arbitrario constante en la energía potencial se ha elegido de modo que dicha energía sea igual a cero a una distancia infinita del núcleo; véase la pág. 11). El momento de la cantidad de movimiento del electrón L es igual a $m_e va$. De aquí, así como de la (1.12)

$$L = m_e a \frac{e}{\sqrt{m_e a}} = e\,(m_e a)^{1/2},$$

y el momento magnético del átomo de hidrógeno

$$M_a = \frac{e^2}{2m_e c}\,(m_e a)^{1/2}. \qquad (1.14)$$

En la mecánica clásica el electrón puede tener una energía (¡negativa!) tan grande como se quiera por el módulo y, por consiguiente, un radio de giro alrededor del núcleo, tan pequeño como se quiera. Aunque para un radio pequeño la velocidad de giro es grande, no obstante, el momento de la cantidad de movimiento disminuye con la disminución del radio. Para $a \to 0$ (o sea, cuando $|\varepsilon| \to \infty$), el momento de la cantidad de movimiento L y, con éste, también el momento magnético M_a tienden a cero. De este modo resulta que puede haber momentos magnéticos tan pequeños como se quiera, mientras que no se encuentran imanes elementales (como las cargas) fijados.

Pero esta conclusión no corresponde a la realidad. Nuestro razonamiento es erróneo, puesto que no tiene en cuenta el carácter cuántico del movimiento de las partículas microscópicas.

Hay que reconocer que la revisión de las leyes del movimiento de las partículas atómicas y subatómicas no estaba relacionado, ni mucho menos, con nuestros imanes. Todo el conjunto de hechos referentes a las propiedades de los átomos exigía la revisión de la física clásica. Y, ante todo, el hecho de existir átomos iguales estables. Las fórmulas (1.12)—(1.14) ofrecen, en realidad, la teoría clásica del átomo de hidrógeno. Pero, por cuanto en la física clásica no existe fundamento alguno para elegir la distancia a a la

cual el electrón gira alrededor del núcleo, llega a ser evidente que los distintos átomos de hidrógeno deberían distinguirse unos de otros; en un átomo el electrón podría encontrarse más cercano al núcleo, y en otro, más alejado. Y durante las colisiones, las dimensiones de los átomos (radios de las órbitas) tienen que variar. Otra cosa: el electrón que posee carga eléctrica y se mueve con aceleración (su velocidad en el movimiento por la órbita elíptica varía tanto de magnitud como de dirección, mientras que, al moverse circunferencialmente, varía tan sólo de dirección), de acuerdo con la electrodinámica, emite ondas electromagnéticas y, por consiguiente, pierde energía (véase la cita del artículo de Einstein en la pág. 23). La disminución de la energía del electrón va acompañada de su acercamiento al núcleo (véase la fórmula (1.13)), de modo que, en fin de cuentas, debe tener lugar la caída de éste en el núcleo. El tiempo de tal caída, a escala humana, es infinitamente pequeño, del orden de 10^{-10} s*). Dicha magnitud demuestra de manera convincente la inaplicabilidad de las leyes clásicas del movimiento al movimiento de las partículas microscópicas. Y salvar la mecánica clásica, considerando que entre el electrón y el protón actúa no la fuerza culombiana, sino otra cualquiera, es imposible: como ya hemos mencionado, los experimentos de Rutherford, dedicados a la dispersión de las partículas α, establecieron directamente que el núcleo crea en su alrededor un campo culombiano.

A continuación insertemos algunos datos sobre la mecánica cuántica sin los cuales es meramente imposible comprender la naturaleza de los fenómenos magnéticos y, mientras tanto, procedamos de la siguiente manera.

Por cuanto para la existencia de imanes elementales es necesario que el radio de la trayectoria del electrón en el átomo tenga dimensiones determinadas, tomémoslo de la mecánica cuántica. En particular, las dimensiones del átomo de hidrógeno son iguales**) a $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e c^2}$. Sustituyamos en la

*) En el cálculo se hizo la suposición de que la «caída» comienza desde la distancia $\approx 10^{-8}$ cm.

**) Como hemos dicho, las leyes de la física clásica no dan la posibilidad de determinar el radio de la trayectoria del electrón alrededor del núcleo. Éste puede ser cualquiera que sea. Es fácil cerciorarse de ello advirtiendo que de las dos magnitudes (e y m_e) integrantes de la ecuación del movimiento del electrón no se puede obtener una expresión que tenga dimensión de longitud. La mecánica cuántica aporta una magnitud más, a saber, la constante de Planck $\hbar$. De las

fórmula (1.14), a_1 por a. Como resultado obtenemos que el valor del momento magnético del átomo de hidrógeno es

$$M_a = \frac{e\hbar}{2m_e c}. \qquad (1.15)$$

Como regla, esta relación se designa con la letra μ y se denomina *magnetón de Bohr*.

El magnetón de Bohr es, precisamente, el momento magnético electrónico elemental. Elemental, en el sentido de que el electrón no puede tener un momento magnético inferior a μ.

Se conocen todas las magnitudes (ya las hemos mencionado) que entran en el segundo miembro de la fórmula (1.15). Al sustituir e, $\hbar$, m_e y c por sus valores numéricos hallamos

$$\mu = 10^{-20} \text{ ergios/Gs}. \qquad (1.16)$$

Hay que comprender claramente que no hemos deducido la fórmula (1.15). Se trata de que el valor de las dimensiones del átomo de hidrógeno se ha «sacado del caletre». Además, como veremos más adelante, el momento magnético, debido a la rotación del electrón alrededor del protón en el estado principal del átomo de hidrógeno (es decir, para la menor energía posible), es igual a cero.

Quisiéramos que el lector, por ahora, retuviera en la memoria dos circunstancias:

1) los imanes elementales existen y

2) el orden de magnitud de los momentos magnéticos electrónicos se determina por el magnetón de Bohr (1.15).

§ 4. ALGUNAS PALABRAS ACERCA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

La mecánica clásica o, como se dice con frecuencia destacando el papel de su creador, la mecánica newtoniana describe irreprochablemente el movimiento de los cuerpos macroscópicos, o sea, de los cuerpos que constan de un número enorme

---

tres magnitudes se puede crear una combinación con la dimensión de longitud.

Problema 4. Demuestren que $\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ es la única combinación con la dimensión de longitud formada a partir de las magnitudes e, m_e y $\hbar$. Expliquen por qué no hemos incluido la velocidad de la luz c en el número de magnitudes de las cuales se construyen las dimensiones del átomo.

de átomos y moléculas*). Sin embargo, el movimiento de los electrones en los átomos no se subordina a la mecánica clásica, sino a la cuántica. Este hecho repercute radicalmente en todas las propiedades del átomo, incluidas las propiedades magnéticas. O, mejor dicho: precisamente con la ayuda de la mecánica cuántica logramos describir de forma correcta (es decir, en correspondencia con el experimento) las propiedades de los átomos, en particular, su estabilidad.

¿En qué consiste, pues, la diferencia entre las leyes cuánticas del movimiento y las leyes clásicas? Para dar una respuesta completa a esta pregunta es necesario estudiar la mecánica cuántica, o sea, el apartado de la física moderna que investiga los movimientos de los microobjetos: átomos, moléculas y partículas que entran en su composición. Un conocimiento algo profundo de la mecánica cuántica exige alta preparación matemática, puesto que el aparato matemático de esta rama de la física es bastante complicado. Además, el entendimiento de las leyes de la mecánica cuántica exige la renuncia a una serie de ideas usuales adquiridas en nuestra experiencia cotidiana. Es posible que la superación de la inercia de nuestra experiencia personal depare incluso mayores dificultades que la asimilación del aparato matemático de la mecánica cuántica. En todo caso, aquellos de los físicos quienes no admitían la mecánica cuántica (¡y entre éstos se hallaba el gran Einstein!) no admitían, precisamente, sus principales enunciados físicos.

Estamos obligados a limitarnos tan sólo a los efectos de la mecánica cuántica que guardan una relación directa con las propiedades magnéticas de los electrones, átomos, moléculas y cuerpos macroscópicos. Cabe advertir que los «efectos» parecerán extraños. No conviene ponerlos en tela de juicio. Basándonos precisamente en estos «efectos», abordemos la explicación de la naturaleza del magnetismo.

RELACIONES DE INDETERMINACIÓN. PARTÍCULAS — ONDAS

Una de las diferencias principales entre las partículas cuánticas (es decir, aquellas cuyo movimiento se subordina a

*) Los epítetos no dan la posibilidad de evaluar cuán enorme es el número de átomos en un cuerpo macroscópico. Nuestros sentidos no están adaptados para concebir semejantes números. 1 cm^3 de un sólido contiene 10^{22} átomos. Al disponerlos en una cadena, apretadamente (las dimensiones del átomo son de 10^{-8} cm), se extenderán a más de mil millones de kilómetros.

la mecánica cuántica) y las clásicas (cuyo movimiento se describe por la mecánica de Newton*)) es que las primeras carecen de trayectorias. Por cuanto en la vida cotidiana estamos acostumbrados a tratar con cuerpos macroscópicos, involuntariamente, las ideas patentes acerca del movimiento de tales cuerpos por una trayectoria quisiéramos transferirlas a los microobjetos cuyo movimiento no puede ser observado directamente. En cuanto a las propiedades de las micropartículas se puede juzgar basándose únicamente en los datos experimentales, sin imponerles (a las micropartículas) las propiedades de los cuerpos macroscópicos. Por consiguiente, los datos del experimento (por ejemplo, las características espectrales de los átomos y las moléculas) exigen la renuncia al concepto de trayectoria del electrón en el átomo. En cada momento de tiempo la trayectoria viene determinada por la posición de la partícula y su velocidad. La ausencia de trayectoria significa que la partícula cuántica no tiene simultáneamente coordenadas determinadas (posición) y velocidad. El estado de la partícula cuántica no puede describirse tan detalladamente como el de la partícula clásica. El enunciado de que *la partícula no puede tener simultáneamente una coordenada determinada y velocidad se denomina principio de indeterminación (de incertidumbre).*

La existencia del principio de indeterminación significa que la magnitud física dependiente de la posición (coordenada) y la velocidad de la partícula no tiene, hablando con propiedad, un valor determinado. (Hagamos constar de una vez, que el momento de la cantidad de movimiento (1.9) es precisamente una magnitud física de este tipo; L depende de la coordenada R y de la velocidad v.)

El principio de indeterminación tiene su expresión cuantitativa en forma de desigualdades que se denominan relaciones de indeterminación o relaciones de Heisenberg:

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad (1.17)$$

donde Δx, Δy, Δz y Δp_x, Δp_y, Δp_z son las indeterminaciones de las coordenadas x, y, z y de las proyecciones del impulso $p = mv$ sobre los ejes x, y, z. La transición formal de la

*) El movimiento de todos los cuerpos puede describirse por medio de ecuaciones de la mecánica cuántica, pero cuando se trata del movimiento de los cuerpos macroscópicos no hay necesidad de ello, pues el error al utilizar las ecuaciones de la mecánica clásica es despreciable.

mecánica cuántica a la mecánica clásica puede efectuarse si la constante de Planck $\hbar$ tiende a cero. Las desigualdades (1.17) significan que cuanto más exactamente ha sido determinada una de las magnitudes, por ejemplo, x, tanto con menos exactitud fue determinada la otra, p_x. Notemos que la exactitud de determinación de x no influye en la de p_y. Las magnitudes físicas se dividen en parejas *sui generis* vinculadas por relaciones de indeterminación.

Desde luego, en la mecánica cuántica lo primordial no es la renuncia a la descripción clásica del movimiento, sino la formulación de los métodos de descripción del comportamiento de las partículas microscópicas. El carácter de descripción se diferencia sustancialmente del adoptado en la física clásica. Como existen magnitudes físicas que, debido al principio de incertidumbre, no tienen un valor determinado, la mecánica cuántica se ve obligada a limitarse a determinar la posibilidad de tal o cual valor de la magnitud física examinada. Subrayamos: el carácter probabilístico de la mecánica cuántica no viene condicionado por nuestros conocimientos incompletos sobre el sistema cuántico. Es resultado de las propiedades de las partículas microscópicas. Así viene constituida la naturaleza. Tal vez se pueda hablar sobre la posibilidad limitada de describir el sistema cuántico por medio de magnitudes clásicas: coordenadas e impulsos. De medida de limitación sirven las relaciones de indeterminación (1.17).

En la óptica existen relaciones parecidas a las de indeterminación. Se sabe que una onda electromagnética plana, con el vector de onda*) k, llena todo el espacio. Sin embargo, el campo electromagnético puede concentrarse en una región finita, incluso muy pequeña del espacio. Con este fin es necesario utilizar un gran número de ondas. Tal estructura de ondas lleva el nombre de *tren de ondas*. Éste se caracteriza por los intervalos Δk_x, Δk_y, Δk_z de las proyecciones de los vectores de onda que se necesitan para la concentración del campo en la región del espacio $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. El juego de los vectores de onda es tanto mayor cuanto menor es la región del espacio ocupada por el tren de ondas:

$$\Delta x \Delta k_x \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \Delta y \Delta k_y \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \Delta z \Delta k_z \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (1.18)$$

*) El vector de onda es el vector k orientado a lo largo de la dirección de propagación de la onda de magnitud $k = 2\pi/\lambda$ (λ es la longitud de onda).

Comparando las desigualdades (1.18) y (1.17) vemos que éstas son equivalentes si se considera

$$p = \hbar k. \tag{1.19}$$

Esta admirable igualdad, la cual relacionó el impulso que caracteriza el movimiento de la partícula, con el vector de onda que caracteriza la onda, la escribió por primera vez el físico francés de Broglie en 1925. También fue él quien vinculó la energía de la partícula ε con la frecuencia de la onda ω:

$$\varepsilon = \hbar\omega. \tag{1.20}$$

Las dos igualdades se denominan *relaciones de de Broglie*. Éstas significan el reconocimiento de las propiedades ondulatorias de las partículas. Debido a ello, la mecánica cuántica se llama frecuentemente *mecánica ondulatoria*.

Las relaciones de indeterminación de Heisenberg y las relaciones de de Broglie son corolarios rigurosos de la mecánica cuántica. De una forma no menos estricta la mecánica cuántica demostró que las ondas poseen propiedades corpusculares (es decir, propiedades de partículas). Por eso las relaciones (1.19) y (1.20) pueden leerse tanto de izquierda a derecha (poniendo el movimiento de la partícula en correspondencia con el proceso ondulatorio), como de derecha a izquierda (destacando las propiedades corpusculares de las ondas).

ESTADOS ESTACIONARIOS

Entre todos los estados de un sistema físico (partícula, átomo, molécula) existen tales en los que una o a la vez varias magnitudes físicas tienen un valor absolutamente determinado. Dichos estados desempeñan un papel fundamental en la mecánica cuántica, siendo la base de la descripción de todo estados (arbitrario) del sistema físico. Así, por ejemplo, existen estados con valores determinados del impulso de la partícula. Como se desprende de las relaciones de indeterminación, en estos estados no se ha determinado en absoluto la posición de la partícula. Esto se ve también de las relaciones deducidas por de Broglie: el movimiento de la partícula con impulso p se pone en correspondencia con una onda plana que tiene un vector de onda $k = p/\hbar$ y la cual llena todo el espacio.

Los estados con energía determinada, conocidos con el nombre de estados *estacionarios*, desempeñan un papel especial. Un sistema cuántico (por ejemplo, un átomo) dejado a su libre albedrío, se encuentra en uno de sus estados estacionarios.

Es posible que la propiedad más característica de los sistemas cuánticos sea la discontinuidad de algunas magnitudes físicas que, para un análisis clásico, pueden tomar una serie continua de valores. En particular, la energía del electrón en el átomo puede tomar tan sólo valores completamente determinados (fig. 9) que son susceptibles de enumerarse. Éstos se denominan niveles de energía. A cada valor de la energía corresponde uno o varios estados estacionarios. Si son varios, difieren en lo que concierne a los valores de otras magnitudes físicas, claro está de aquellas que junto con la energía pueden tener valores determinados.

Un objeto muy importante, aunque sencillo, de la mecánica (y clásica, y cuántica) es el oscilador. Figúrense una partícula de masa m que oscila por acción de la fuerza F proporcional a la distancia x entre la partícula y su posición de equilibrio ($F = -kx$). Tal partícula oscila con una frecuencia totalmente determinada $\omega = \sqrt{k/m}$. La partícula clásica puede tener cualquier energía de oscilación ε_{osc} (la cual se deremina por la amplitud de oscilación), mientras

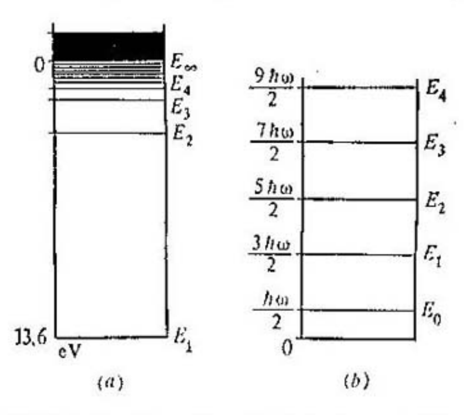


FIG. 9. *Niveles discretos de energía: a) del electrón en el átomo de hidrógeno* $E_n = -E_0/n^2$; $n = 1, 2, \ldots, E_0 \approx 13{,}6$ *eV; b) de un oscilador armónico con la frecuencia* ω $\left(E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega;\ n = 0, 1, 2, \ldots\right)$.

que la cuántica tiene sólo una de todo el surtido discontinuo (discreto) (fig. 9, b)):

$$\varepsilon_{osc} = (n + 1/2)\,\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entre todos los estados estacionarios conviene destacar el de energía mínima. Éste se denomina *fundamental*. Un sistema físico (el átomo, para que sea claro) puede encontrarse en estado fundamental un tiempo infinitamente largo, siendo éste el estado estacionario verdadero. Los estados con gran energía son estados de excitación. Estos últimos son tan sólo aproximadamente estacionarios. Al emitir una onda electromagnética, el átomo que se encuentra en estado de excitación puede pasar a un estado con menor energía. «Descendiendo» por los niveles de energía, al fin y al cabo el átomo irá a parar al estado fundamental. Entonces, ¿qué nos otorga el derecho de considerar, a pesar de todo, que los estados de excitación del átomo son estacionarios? La circunstancia de que el tiempo de vida en estado de excitación es relativamente grande (se sobreentiende que a escala atómica). Es interesante subrayar: este hecho es resultado de la pequeñez de la carga del electrón. ¿Recuerda usted: $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$? Téngase presente: el tiempo de vida del átomo en estado de excitación es aproximadamente igual a $\tau_a \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^3 \approx \tau_a (137)^3$, donde τ_a es el tiempo de rotación del electrón por la «órbita». ¡Seis millones de vueltas «dará» el electrón alrededor del núcleo antes de pasar del estado de excitación al estado fundamental! Hay todas las razones para considerar que el estado de excitación es un estado estacionario.

El lector comprende, desde luego, que las palabras «órbita» y «dará vuelta» están puestas entre comillas por cuanto en la realidad el electrón que se mueve en el átomo no tiene ninguna órbita. ¿Qué significa en este caso el tiempo τ_a? Acordémonos de la relación deducida por de Broglie (1.20), aplicándola a la diferencia de energía entre los estados de excitación y fundamental:

$$\hbar\omega = \varepsilon_{exc} - \varepsilon_{fund} \quad \text{o bien} \quad \omega = \frac{\varepsilon_{exc} - \varepsilon_{fund}}{\hbar}.$$

La frecuencia ω y el período de oscilación τ son inversamente proporcionales entre sí, es decir, $\tau = 2\pi/\omega$. Si la frecuencia ω se sustituye por la expresión que acabamos de

escribir, el período que le corresponde será, precisamente, el «tiempo de rotación» τ_a:

$$\tau_a = \frac{2\pi\hbar}{\varepsilon_{exc} - \varepsilon_{fund}}.$$

En algunas ocasiones el movimiento del electrón en el átomo puede describirse con gran precisión recurriendo a la mecánica clásica. Entonces τ_a, calculado por la fórmula *cuántica*, coincide realmente con el tiempo clásico de rotación (¡ya sin comillas!).

Hemos formulado algunos resultados de la mecánica cuántica sin decir una palabra acerca del aparato matemático con cuya ayuda se han obtenido. La descripción del aparato matemático no forma parte de nuestra tarea. Cabe señalar solamente una cosa: existen varios aparatos matemáticos de la mecánica cuántica muy distintos por su forma, pero equivalentes por su esencia. Uno de éstos se basa en la investigación de las soluciones de la ecuación diferencial a la cual debe satisfacer la función de onda del sistema cuántico (E. Schrödinger). Al realizar operaciones rigurosamente reglamentadas con esta función se pueden sacar los corolarios físicos que nos interesan: los valores de las magnitudes físicas que permiten una comparación directa con el experimento.

Con mayor frecuencia la función de onda se designa con la letra ψ. Los autores también harán uso de esta designación. Hay que tener presente (y esto es importante para lo ulterior): ψ es una función compleja determinada con una precisión hasta del factor complejo. O bien, con otras palabras, las funciones de onda ψ y $\alpha\psi$ caracterizan el mismo estado si α es una magnitud constante.

El sentido físico de la función de onda llega a ser especialmente patente si ψ depende de la coordenada r y el tiempo t. En este caso la magnitud $|\psi(r, t)|^2$ es proporcional a la probabilidad de hallarse la partícula en el punto r en el período de tiempo t (M. Born).

UNA VEZ MÁS SOBRE EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

El sistema cuántico más simple es el átomo de hidrógeno: el electrón que gira alrededor del protón. Los niveles de energía se definen por una fórmula sencilla:

$$\varepsilon_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.21}$$

¿Qué significa esta fórmula? La misma nos da a entender que el átomo de hidrógeno puede encontrarse en diferentes estados: en estados con diferente energía. Entre éstos existe el estado con energía mínima: como hemos mencionado, lo denominan fundamental. La energía del electrón en el estado fundamental es igual a $\varepsilon_1 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \approx -13{,}6$ eV $\approx$ $\approx -2{,}18 \cdot 10^{-11}$ ergios. Esto significa que para separar el electrón del protón es necesario consumir 13,6 eV de energía. Si el átomo se encuentra no en estado fundamental, sino en el de excitación, éste puede, como ya hemos dicho, irradiar la energía sobrante en forma de luz. La frecuencia de la luz emitida se determina por la fórmula de Bohr que es la formulación de la ley de la conservación de la energía con arreglo al proceso de generación del fotón por el átomo de hidrógeno:

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} = \hbar\omega. \tag{1.22}$$

Todo lo expuesto hasta el momento son corolarios estrictos de la mecánica cuántica. Y ahora vamos a proceder de una forma inconsecuente. A pesar de que infundíamos al lector que la mecánica cuántica abolió el concepto de trayectoria, utilizaremos la fórmula clásica (1.13) a la par de la cuántica (1.21). Veremos que la cuantificación de la energía conduce a la cuantificación de las órbitas del electrón*). Éste puede girar solamente describiendo órbitas permitidas con los radios iguales a $a_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$. Al estado fundamental corresponde el radio mínimo de la órbita igual a $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$. Ya nos hemos aprovechado de esta circunstancia para obtener el valor del imán elemental (véase la pág. 26). Lamentablemente, el simple esquema que pudiera sirgir en la mente del lector reflexivo:

cuantificación de la órbita → lóbulos de corriente estables → → imanes elementales (atómicos),

resulta erróneo precisamente debido a que el electrón no describe una trayectoria. Por ejemplo, en el estado fundamental

---

*) Semejante mecánica ecléctica, la cual conserva los rasgos de la mecánica clásica pero que está completada por las condiciones de cuantificación, la creó a principios del siglo XX N. Bohr con el fin de explicar los espectros atómicos. El éxito alcanzado en la explicación del espectro de hidrógeno (las fórmulas (1.21) y (1.22)) demostró que la física se encuentra en un camino justo.

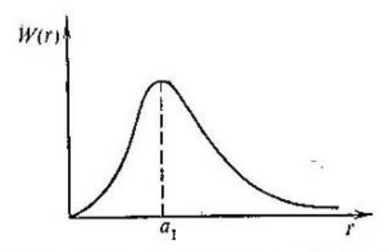


FIG. 10. *Distribución de las probabilidades W (r) de descubrir el electrón a la distancia r del núcleo del átomo de hidrógeno en el estado fundamental. El área bajo la curva es igual a la unidad.*

no se puede hablar de ninguna trayectoria. La magnitud a_1 prefija el radio de la esfera dentro de la cual, con una probabilidad próxima a la unidad, se puede descubrir el electrón (fig. 10). No se puede ni hablar sobre una determinación más exacta de la posición del electrón, puesto que ello contradiría el principio de indeterminación. Tampoco se da un lóbulo de corriente, cualquiera que sea y, como consecuencia, tenemos este extraño resultado: aunque el electrón se mueve alrededor del núcleo, su movimiento no conduce a la aparición del momento magnético.

Pero sabemos que los imanes elementales existen. Para orientarnos en el enredo surgido hay que comprender cómo se modifica en la mecánica cuántica la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento.

§ 5. MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. CUANTIFICACIÓN ESPACIAL

Sería más lógico insertar el relato sobre el momento de la cantidad de movimiento en el párrafo anterior. Pero lo hemos destacado porque es de particular importancia para la comprensión de la naturaleza del magnetismo.

En física, un papel trascendente pertenece a las leyes de la conservación. En este sentido la física atómica y la física de los fenómenos magnéticos no representan una excepción. Los electrones en el átomo se mueven en el campo de la fuerza que posee simetría esférica o, hablando sencillamente, de la fuerza que actúa sobre el electrón por el lado del núcleo, depende de la distancia que separa el electrón del núcleo, pero no depende de la dirección. La mecánica clásica «pre-

vió» para semejante ocasión una ley especial de la conservación, a saber, la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento*):

$$L = [pr] \text{ no depende del tiempo.}$$

¿Y qué dice al respecto la mecánica cuántica? Por supuesto, la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento tiene lugar también en la mecánica cuántica (es una regla general: cada ley «clásica» de la conservación tiene su análogo cuántico; lo inverso no es válido: hay leyes de la conservación cuánticas que no tienen sus análogos en la física clásica).

La existencia de la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento significa que el electrón que se encuentra en un estado estacionario determinado (es decir, en un estado con energía determinada) puede tener un momento determinado de la cantidad de movimiento. Pero... ¿es que la partícula puede tener un momento determinado de la cantidad de movimiento? Fíjense bien en la fórmula $L = [pr]$. En ella entran al mismo tiempo tanto p como r. Mientras tanto, las relaciones de las indeterminaciones (1.17) prohíben a la partícula tener simultáneamente la coordenada r y el impulso p determinados. ¿A qué lleva este hecho?

El análisis mecanocuántico estricto del movimiento de una partícula en el campo de fuerza con simetría central demuestra: el momento de la cantidad de movimiento de la partícula, el cual se conserva, puede caracterizarse por la longitud L y la proyección L_z sobre cierto eje (lo llamamos eje z).

Inmediatamente surge la pregunta: «¿Sobre qué eje?» ¡Es indiferente! Precisamente esta indiferencia subraya el carácter isótropo de la fuerza que actúa sobre la partícula. Se sobreentiende que si existe cualquier causa que destaca una dirección determinada, entonces, debe tratarse de la proyección sobre esta dirección.

La mecánica cuántica no sólo limita la fijación del momento de la cantidad de movimiento a dos magnitudes (L y L_z) en vez de tres (el vector clásico se caracteriza por tres proyecciones), sino también formula restricciones rigurosas

*) *Problema* 5. Los que saben diferenciar y conocen el sentido del producto vectorial deducirán con facilidad, a partir de la ecuación de Newton $dp/dt = F$ (variación del impulso p en la unidad de tiempo es igual a la fuerza F), que $L = [pr] =$ const, es decir, que no depende del tiempo (por supuesto, si F es una fuerza central: $F \parallel r$).

para estas magnitudes. La proyección del momento de la cantidad de movimiento sobre el eje z puede tomar los valores

$$L_z = m\hbar, \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l, \qquad (1.23)$$

y la longitud del vector del momento de la cantidad de movimiento

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)} > \hbar l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.24)$$

De este modo, el momento de la cantidad de movimiento pertenece a aquellas magnitudes físicas que se *cuantifican*, o sea, que pueden tener tan sólo valores discontinuos (discretos) determinados*) proporcionales a la constante de Planck $\hbar$.

Cuando se quiere mencionar la magnitud del vector del momento de la cantidad de movimiento, simplemente se nombra el valor del número l. En adelante siempre entenderemos por momento de la cantidad de movimiento, la magnitud adimensional l, omitiendo el factor $\hbar$.

Presten atención a que la partícula puede poseer ¡un momento nulo de la cantidad de movimiento!

Por regla general, cuando decimos que la partícula tiene un momento determinado de la cantidad de movimiento, esto significa que dicha partícula se encuentra en un estado con el valor prefijado de l. En este caso la proyección de L sobre el eje puede tener uno de los $2l + 1$ valores. Expresándolo de una forma más palmaria: el momento de la cantidad de movimiento puede tener tan sólo direcciones discretas en el espacio (es cierto que no se debe olvidar que el eje z —de cuantificación— tiene una dirección arbitraria). Esta propiedad cuántica del vector del momento de la cantidad de movimiento lleva el nombre *de cuantificación espacial* (fig. 11).

Las proyecciones L_x y L_y del vector L para L y L_z dados no tienen valores determinados; sólo se puede hablar de la probabilidad de tal o cual valor de estas proyecciones. Si se quiere recurrir a una imagen clásica, es conveniente figurarse el vector que se conserva del momento de la cantidad

---

*) *Problema* 6. Partiendo de las fórmulas de la mecánica clásica calculen la variación de la velocidad de la partícula con una masa de 1 g que se mueve describiendo una órbita circular de 1 cm de radio, para la variación del momento de la cantidad de movimiento condicionada por el cambio de L en la unidad. Reflexionen, ¿por qué no conviene tomar en consideración la cuantificación durante el movimiento de los cuerpos macroscópicos?

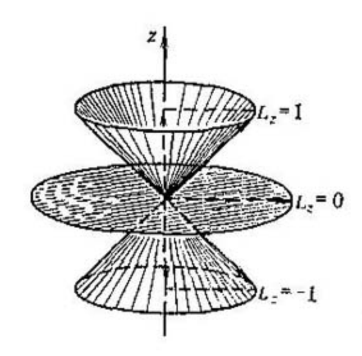


FIG. 11. *Cuadro clásico patente que representa la cuantificación espacial.*

de movimiento como vector que se halla sujeto a precesiones alrededor del eje z. El ángulo entre L y el eje z viene determinado por el valor de L_z, es decir, m (véase (1.23) y la fig. 11).

La idea patente sobre el momento de la cantidad de movimiento que «precesiona» explica por qué el valor máximo de la proyección L_z es menor que L (véase (1.23) y (1.24)). Si L fuese igual a $\hbar l$, las dos proyecciones restantes L_x y L_y en este estado serían iguales a cero, es decir, tendrían a la par de L y L_z valores determinados, lo que es imposible

El momento clásico de la cantidad de movimiento y el momento cuántico no están separados por un muro infranqueable. Para $l \gg 1$ la cuantificación espacial no es demasiado sustancial, y la magnitud L igual a $\hbar\sqrt{l(l+1)} \approx \approx \hbar l\left(1+\frac{1}{2l}\right)$, es casi indistinguible del valor clásico de $\hbar l$.

Hablando con mayor rigurosidad: las propiedades del momento clásico de la cantidad de movimiento pueden obtenerse como resultado de la transición límite a los grandes valores de l. Es un ejemplo del principio general de acuerdo con el cual la mecánica cuántica incluye en sí la clásica en forma de caso límite.

Aquí, el momento de la cantidad de movimiento nos interesa en la medida en que está relacionado con el momento magnético. La mecánica cuántica no suprimió la relación formulada por la igualdad (1.11), es decir, confirmó que para el electrón la relación giromagnética $\gamma=\frac{e}{2m_e c}$. Por consiguiente, si el electrón se encuentra en un estado con la proyección del momento de la cantidad de movimiento

igual a m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$), la proyección de su momento magnético es igual a

$$M_z = \frac{e\hbar}{2m_e c} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l. \quad (1.25)$$

Se impone la siguiente deducción: el electrón en movimiento puede solicitar el papel del imán elemental, aunque solamente en el caso de que se encuentre en un estado con el momento de la cantidad de movimiento diferente de cero, o sea, si $l \neq 0$. Por otra parte, es importante subrayar: el electrón que gira alrededor del núcleo puede encontrarse en un estado con el momento de la cantidad de movimiento igual a cero. ¡Está claro que es el resultado de la ausencia de trayectoria! Ya hemos dicho que el electrón en el átomo de hidrógeno que se encuentra en estado fundamental ¡tiene un momento de la cantidad de movimiento igual a cero! Debido a ello, por ahora no discutiremos si los resultados mecanocuánticos aducidos sirven de prueba de existencia de los imanes elementales. Volveremos aún a esta cuestión al final del capítulo. Solamente destacaremos que la mecánica cuántica, al explicar la estabilidad de los átomos, demostró al mismo tiempo que los electrones en el átomo se mueven de tal manera que las proyecciones de sus momentos de la cantidad de movimiento son números enteros en unidades $\hbar$; la existencia de la relación entre el momento magnético y el de la cantidad de movimiento evidencia que el electrón que se mueve alrededor del núcleo puede considerarse como momento magnético estable que, es cierto, posee propiedades cuánticas. Y lo principal entre éstas es la cuantificación espacial.

La estabilidad del momento magnético del electrón que gira alrededor del núcleo es tan importante para la comprensión de la naturaleza atómica del magnetismo que decidimos escribir un breve resumen de este párrafo.

Los electrones en el átomo tienen un estado determinado. Este estado es *estable* en el sentido de que se puede modificar tan sólo comunicando a los electrones cierta porción finita de energía $\Delta\varepsilon$ (grande según la escala atómica).

Cada estado viene caracterizado por un momento determinado de la cantidad de movimiento y, por consiguiente, también por el momento magnético. Por lo tanto, el momento magnético del átomo es estable (en la misma medida que el estado de los electrones del átomo).

§ 6. MOMENTO MAGNÉTICO EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Hasta el presente el momento magnético desempeñaba el papel de fuente del campo magnético. Todavía hablaremos mucho sobre este papel suyo. Pero ahora, cuando nos hemos enterado de que en la naturaleza existen imanes estables, conviene examinar cómo se comportarán éstos si se les sitúa en un campo magnético externo, es decir, engendrado por otras fuentes. En este caso, además, consideraremos los imanes tan estables que su magnitud no dependa de la del campo magnético. Cuando nos referimos a los imanes atómicos, no se trata de una restricción especial. Por el contrario, las más de las veces es muy difícil crear un campo magnético tan grande que el mismo cambie la magnitud del momento magnético atómico, aunque, como es cierto, sólo en el caso de que dicho momento se diferencie de cero*). Por esta razón, cuando se trata del comportamiento del momento magnético en el campo magnético se tiene en cuenta la posibilidad de su *desplazamiento*, o sea, del movimiento como un todo único y de los giros.

Comenzaremos por el campo magnético permanente y homogéneo.

Se conoce bien la propiedad de la aguja magnética de orientarse de una forma determinada en el campo magnético. E igualmente bien se conoce que en esta propiedad suya se asienta la aplicación de la aguja magnética con fines de orientación. Hubo una época en que la propiedad de orientarse «espontáneamente» en el espacio se percibía como un milagro. Pero, como dijo Einstein (refiriéndose precisamente al comportamiento de la aguja magnética), «el desarrollo ... del mundo intelectual es, en cierto sentido, la superación del sentimiento de admiración: la huida incesante de lo «sorprendente», del «milagro»»**). La aguja de la brújula se orienta porque esto es ventajoso desde el punto de vista energético. La energía ε_M del momento magnético $\boldsymbol{M}$ en el campo magnético $\boldsymbol{H}$ es

$$\varepsilon_M = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{H} = -MH\cos\theta, \qquad (1.26)$$

---

*) En el segundo capítulo insertaremos la correspondiente evaluación de la magnitud del campo magnético.

**) A. Einstein. Recopilación de obras científicas, t. IV, pág. 261, Moscú, 1967 (ed. en ruso).

donde θ es el ángulo entre el momento magnético y el campo magnético. Está claro que para $\theta = 0$ la energía es mínima.

Si el momento magnético resulta desviado del campo magnético en el ángulo θ, entonces, por el lado del campo magnético actúa un momento de fuerza dirigido perpendicularmente al plano que pasa a través del campo magnético H en el cual, en un momento de tiempo dado, se encuentra el momento magnético. Como resultado, el momento magnético girará describiendo un cono alrededor del campo magnético. Por cuanto el momento magnético se diferencia del de la cantidad de movimiento por el factor $\frac{e}{2m_ec}$, la frecuencia de su rotación es

$$\omega_H = \frac{eH}{2m_ec} = \gamma H. \tag{1.27}$$

Vemos que la relación giromagnética (como antes, la hemos designado con γ) se presenta en un nuevo papel, vinculando el campo magnético H con la frecuencia de precesión del momento magnético*) ω_H. Y en este nuevo papel lo encontraremos con mucha mayor frecuencia que en el que apareció por primera vez en el escenario (véase (1.11)).

Las fórmulas (1.26) y (1.27) son válidas para el momento magnético clásico. En el caso del momento magnético cuántico es necesario tener en cuenta la cuantificación espacial. Como ya hemos mencionado, el momento puede encontrarse en $2l + 1$ estados. A cada estado corresponde su nivel magnético de energía igual a

$$\varepsilon_M^m = -\frac{e\hbar H}{2m_ec} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l. \tag{1.28}$$

El sistema de ecuaciones de este tipo se denomina equidistante (fig. 12): la distancia entre los niveles vecinos no depende de m y es igual a

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_M^m - \varepsilon_M^{m+1} = \frac{e\hbar H}{2m_ec}. \tag{1.29}$$

Si al electrón se le «antoja» pasar de un nivel a otro, tendrá que absorber o emitir un cuanto de energía electromagnética igual a $\hbar\omega = \frac{e\hbar H}{2m_ec}$. De este modo, la frecuencia del campo electromagnético absorbido o emitido durante la

*) *Problema* 7. Hallen la relación numérica entre la longitud de la onda electromagnética de frecuencia ω_H y el campo magnético H.

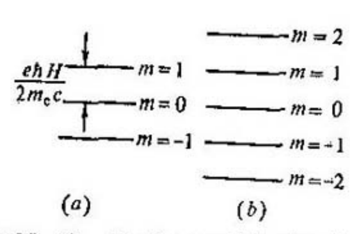


FIG. 12. *Niveles equidistantes de la energía del momento magnético en un campo magnético permanente: a) $l = 1$; b) $l = 2$.*

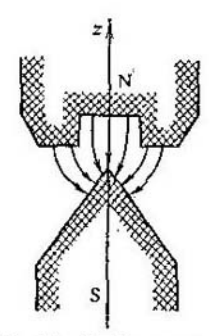


FIG. 13. *En la proximidad del eje del imán, el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z y aumenta a medida que se acerca a la punta, es decir, depende de z.*

transición de un nivel magnético a otro es igual a γH. Ésta coincide con la de rotación clásica del momento magnético alrededor del campo.

Ahora, sea que el campo magnético H, dirigido igual que antes a lo largo del eje z, depende él mismo de la coordenada z (fig. 13). Por consiguiente, también depende de z la energía $\varepsilon_M = \varepsilon_M(z)$. La dependencia de la energía respecto a la coordenada significa que sobre el momento magnético actúa una fuerza igual a

$$F_H = M_z \frac{dH}{dz}. \tag{1.30}$$

En el caso del momento magnético clásico, M_z se sustituye por $M\cos\theta$, y en el caso del cuántico, por uno de los $2l+1$ valores de la proyección del momento magnético sobre el eje z (véase (1.25)).

§ 7. EL ESPÍN Y EL MOMENTO MAGNÉTICO PROPIO DEL ELECTRÓN

Lamentablemente, la secuencia histórica de los descubrimientos en la física, al igual que, desde luego, en cualquier otra ciencia, no corresponde a la lógica del relato sobre la ciencia. Sería conveniente comenzar este apartado de la siguiente manera.

La existencia de la fuerza (1.30) que actúa sobre el momento magnético da la posibilidad, observando la desviación del haz de partículas atómicas que pasan a través de un campo magnético no homogéneo, de medir su momento magnético y, que es lo más importante, de cerciorarse de la certeza de las deducciones de la mecánica cuántica sobre la cuantificación espacial. En efecto, después que el haz de átomos dotados de momento magnético $\frac{e}{2m_ec}L$ haya atravesado un campo magnético no homogéneo, deberán formarse $2l + 1$ haces separados espacialmente (fig. 14). Los físicos alemanes O. Stern y W. Gerlach, en 1922 realizaron tal experimento. A través de un campo magnético no homogéneo dejaron pasar un haz de átomos de plata. El resultado fue completamente inesperado, aunque confirmó el hecho de la cuantificación espacial: el haz se desdobló. Al parecer, éste no debía desdoblarse en absoluto, ya que los electrones en el átomo de plata tienen un momento nulo de la cantidad de movimiento. Supongamos que, por cualquier razón, los átomos, al pasar a través del instrumento, se excitan, o sea, pasan a un estado de mayor energía y de momento de la cantidad de movimiento distinto a cero. Pero, en este caso, el número de haces a la salida del instrumento debe ser impar: $2l+1$. Mientras tanto, el experimento demostró con meridiana claridad: ¡el haz se divide en dos! Y se divide de un modo tal como si $l = 1/2$, en expresa contradicción con las deducciones de la mecánica cuántica.

...Habría sido conveniente comenzar este apartado de la forma que acabamos de exponer, para pasar luego a explicar

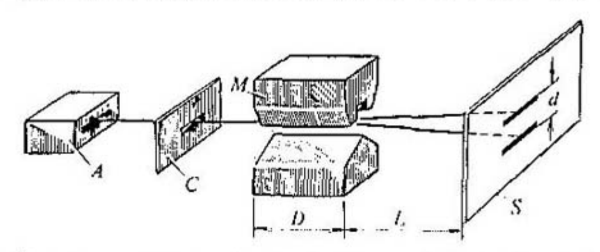


FIG. 14. *Esquema del experimento de Stern — Gerlach: A es la fuente de los átomos de plata; C, el colimador; M, el imán (D, la distancia que recorre el haz en el campo magnético con* $\frac{dH}{dz}$ *diferente de cero); S, la pantalla (d, la distancia entre las huellas de los haces), L, la distancia desde el imán hasta la pantalla.*

que el resultado inesperado del experimento de Stern y Gerlach se debe al hecho de que el electrón posee *espín**).

También habríamos podido proceder de otra manera. Relatar acerca del experimento realizado en 1915 por Einstein y W. de Haas**), quienes midieron directamente la relación giromagnética y averiguaron que ésta era dos veces mayor que la presagiada por la teoría. Y luego explicar que la divergencia entre la teoría y el experimento se debe a la existencia del *espín* en el electrón.

Lamentablemente (lo repetimos una vez más), los acontecimientos no se desarrollan en una consecuencia cómoda desde el punto de vista lógico. Einstein y de Haas, por lo visto, debido a un error en los cálculos, obtuvieron un valor de la relación giromagnética, igual a $\frac{e}{2m_e c}$, es decir, no descubrieron divergencia respecto a la teoría de aquella época. Más aún, su artículo precisamente se titula «Demostración experimental de las corrientes moleculares de Ampère». Subrayemos: Einstein comprendía perfectamente que la hipótesis de Ampère contradice la física clásica (véase la nota en la pág. 23). Precisamente por esta razón fue ideado el experimento para observar el efecto giromagnético. Este experimento debía confirmar (y, según la opinión de los autores, confirmó) la existencia de corrientes moleculares. Más tarde la relación giromagnética se midió reiteradas veces. Ésta resultó dos veces mayor que lo que se desprende de la fórmula (1.11).

---

*) *Problema* 8. ¿A qué distancia L del imán, en el experimento de Stern y Gerlach, debe disponerse la pantalla para que la distancia entre las huellas de los haces sea igual a 0,0044 mm? En el experimento de Stern y Gerlach $dH/dz = 2{,}2 \cdot 10^5$ *Oe/cm*. El ancho de la zona del campo no homogéneo $D = 10$ cm (véase la fig. 14) y la velocidad de los átomos del haz era de 10^6 cm/s.

**) Los artículos de Einstein y de Einstein — de Haas pueden leerse en la recopilación de obras de Einstein ya citada (t. III, págs. 359—384). Einstein y de Haas midieron la amplitud de las oscilaciones torsionales de una barra, originadas como resultado de su remagnetización. Para agudizar la metodología, los científicos utilizaron la resonancia entre la frecuencia del campo remagnetizante y la frecuencia de oscilaciones propias de dicha barra. Seguramente muchos se asombrarán al enterarse de que Einstein no sólo fue teórico. Trabajó «con sus propias manos», participando activa y directamente en el experimento, y hasta creó el material didáctico para mostrar el efecto giromagnético. La interesante historia del descubrimiento y el destino ulterior del efecto giromagnético se expone en el artículo de V. Ya. Frénkel (УФН («Éxitos de las ciencias físicas»), 1979, t. 128, fasc. 2, pág. 545, en ruso).

Stern y Gerlach llevaron a cabo su experimento en 1922, cuando ya se sospechaba la existencia de espín en el electrón. Esta sospecha surgió al analizar los espectros atómicos que en aquellos años eran la fuente principal de datos acerca de la estructura de los átomos.

Pero, ¿qué es el espín? ¿Y qué relación tiene con la física de los fenómenos magnéticos?

La partícula cuántica*), además del momento de la cantidad de movimiento debido a su propio movimiento en el espacio (aquél se denomina momento *orbital* de la cantidad de movimiento, aunque, como recordará el lector, no se puede hablar de ninguna órbita) puede tener el momento de la cantidad de movimiento inherente a la propia partícula. Dicho momento lleva el nombre de momento propio (intrínseco), o *espín*. La palabra espín (spin) en inglés significa «huso», pero la idea acerca de la partícula con espín diferente de cero, como acerca de una bolita o un trompo de radio finito que gira alrededor de su eje, en ningún grado, ni siquiera en el más aproximado, corresponde a la realidad. En primer lugar, porque a una partícula elemental (por ejemplo, al electrón), en general, no se le consigue atribuir un radio finito. Los numerosos intentos de hacerlo se vieron frustrados, por cuanto entraron en contradicción con los requerimientos de la teoría de la relatividad. El hecho de que el espín no es resultado de la rotación espacial de la partícula se nota de la forma más espectacular a partir de lo siguiente: los valores de la proyección del momento propio de la cantidad de movimiento de las partículas pueden ser no sólo enteros (véanse (1.23) y (1.24)), sino también semienteros.

La magnitud del espín la designaremos con la letra s (análogo de l), y su proyección, por medio de la letra s con el subíndice z, o sea, s_z (análogo de m).

Para el electrón: $s = 1/2$; $s_z = \pm 1/2$; $2s + 1 = 2$. Los protones, neutrones y neutrino también tienen el espín igual a 1/2. El espín del fotón es igual a la unidad, y todos los mesones π (son tres: uno neutro, π^0, y dos cargados, π^+ y π^- con las cargas $\pm e$) poseen espín cero.

---

*) Por supuesto, todas las partículas son cuánticas. La combinación de palabras «partícula cuántica» recalca que se trata de fenómenos cuya investigación debe realizarse teniendo en cuenta las leyes cuánticas. Aquí concretamente, por partícula cuántica ha de entenderse aquella cuyo momento de la cantidad de movimiento no es grande en comparación con $\hbar$.

Como vemos, la existencia de momento propio amplió los valores posibles del momento de la cantidad de movimiento: el espín puede tomar valores enteros ($s = 0, 1, 2$, etc.) y semienteros ($s = 1/2, 3/2, 5/2$, etc.). El espín cero se incluye en los enteros (integrales).

Las partículas con espín cero y con espín entero se denominan *bosones* (en honor al físico hindú Bose), a las de espín semientero se denominan *fermiones* (en honor a Fermi). Más tarde comprenderemos por qué todas las partículas se subdividen en dos clases.

El espín de una partícula elemental es una propiedad inherente de ésta, lo mismo que la carga o la masa. El electrón o el protón no pueden desprenderse de su espín, así como no pueden perder una parte de su carga o de su masa. Precisamente en ello se revela el carácter elemental del electrón, protón, neutrón y otras partículas que suelen considerarse elementales. Y su carácter elemental no impide las transformaciones mutuas. Pero esto es un tema completamente distinto.

Dirac construyó la teoría del electrón, es decir, formuló la ecuación a la cual debe statisfacer la función de onda del electrón. Dicha ecuación (llamada precisamente ecuación de Dirac) toma en consideración no sólo las propiedades ondulatorias del electrón, sino también los requerimientos de la teoría de la relatividad. La mecánica cuántica que está en consonancia con los requisitos de la teoría de la relatividad se denomina *mecánica cuántica relativista*. Cuando ésta se creaba, se ignoraba la existencia de partículas con espín distinto a 1/2. A Dirac le parecía que la igualdad del espín a 1/2 era consecuencia lógica de la teoría cuántica relativista. Después de haberse descubierto las partículas con espín diferente de 1/2, se dilucidó que la ecuación de Dirac no era la única posible. Las funciones de onda de las partículas con $s \neq 1/2$ obedecen las ecuaciones que se distinguen de la de Dirac, la cual describe irreprochablemente las propiedades del electrón: partícula con espín 1/2.

El resultado lógico de la mecánica cuántica relativista de una partícula de carga e, masa m_e y espín 1/2 era la existencia en ella de un momento magnético que tiene dos proyecciones iguales a $\pm \frac{e\hbar}{2m_e c}$ ¡Compare esta expresión con la fórmula (1.25)! Se advierte que para el momento de espín propio de la cantidad de movimiento, la relación giromagné-

tica es igual a $\frac{e}{m_e c}$, es decir, el doble en comparación con el momento orbital. Designaremos la relación giromagnética clásica (orbital) en unidades $\frac{e}{2m_e c}$ por medio de g_L, y la de espín, por medio de g_s.

Subrayemos: $g_s = 2$ en unidades $\frac{e}{2m_e c}$ para todo valor de s (¡incluso para el entero!). La letra g sin subíndice la dejaremos para la relación giromagnética total que tiene en cuenta tanto el momento orbital como el de espín. Se denomina factor g o factor Lande.

Como ya hemos dicho, el hecho de que el electrón tenga espín explica, efectivamente, tanto el experimento de Stern—Gerlach, como el de Einstein — de Haas. En ambos casos se manifestó no el momento orbital, sino el momento propio de la cantidad de movimiento de los electrones.

Tabla 1

Partícula	Símbolo	Masa, g	Espín	Momento magnético, ergio/Gs
Electrón	e	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$	1/2	$\frac{e\hbar}{2m_e c} = 0{,}9 \cdot 10^{-20}$
Protón	p	$m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-24}$	1/2	$2{,}8 \frac{e\hbar}{2m_p} = 1{,}3 \cdot 10^{-23}$
Neutrón	n	$m_n = 1{,}01 \cdot m_p$	1/2	$1{,}9 \frac{e\hbar}{2m_n c} = 0{,}9 \cdot 10^{-23}$

Hemos sintetizado en una pequeña tabla (tabla 1) los datos sobre los espines y los momentos magnéticos de tres partículas más importantes, aquellas de las cuales están constituidos todos los cuerpos que nos rodean, así como nosotros mismos.

El hecho de que el neutrón, aunque es neutro, posee momento magnético, así como el hecho de que el momento magnético del protón es 2,8 veces mayor que lo vaticina la fórmula de Dirac, encontró su explicación en la teoría moderna de las partículas elementales.

En los cuerpos, el número de electrones es igual al número de protones, mientras que el momento magnético propio del electrón es muchas veces mayor que el momento magnético del protón. Claro que precisamente los electrones desem-

peñan un papel prioritario en las propiedades magnéticas de los cuerpos de distinta naturaleza. Es verdad que no sólo se logra descubrir y medir los momentos magnéticos de los núcleos atómicos (se conocen bien los momentos magnéticos practicamente de todos los núcleos atómicos), sino también investigar las propiedades magnéticas de las sustancias que se deben a la existencia de los momentos magnéticos nucleares. El apartado de la física de fenómenos magnéticos, ocupado en investigar las propiedades magnéticas de las partículas nucleares, lleva el nombre de *magnetismo nuclear*. Pero, por desgracia, casi no relataremos nada acerca del magnetismo nuclear.

§ 8. EL FACTOR *g*

Bueno, por fin hemos llegado al imán elemental. En la absoluta mayoría de los casos puede considerarse como imán elemental el momento magnético propio del electrón. Su proyección sobre el eje es igual (con una exactitud de hasta un signo) al magnetón de Bohr $\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c}$. Si el electrón se mueve de modo que su momento orbital sea distinto a cero, los momentos magnéticos orbital y de espín se suman. Pero, ¿cómo se pueden sumar los «vectores cuánticos», es decir, los vectores que poseen valores discretos de la proyección sobre el eje elegido? Los vectores «clásicos» se adicionan de acuerdo con la regla del paralelogramo. Con este fin es necesario saber la longitud de cada vector y el ángulo entre éstos. Cuando se suman los vectores «cuánticos» se procede de la siguiente forma.

Supongamos que se dan dos vectores L_1 y L_2, tales que $L_1^2 = (l_1 + 1)\, l_1$ y $L_2^2 = (l_2 + 1)\, l_2$, siendo l_1 y l_2 números enteros o semienteros. Se pregunta, ¿qué vector J puede ser igual a la suma de L_1 y L_2? Para obtener la respuesta proyectemos estos vectores sobre el eje común. Está claro que las proyecciones máxima y mínima de la suma de dos vectores es $l_1 + l_2$ y $| l_1 - l_2 |$. Esto significa que la proyección máxima del vector J, es decir, J, puede tomar los valores desde $| l_1 - l_2 |$ hasta $l_1 + l_2$. Si se retiene en la memoria la expresión para el cuadrado del vector (véase la pág. 37), entonces con los vectores «cuánticos» se puede operar casi como con los clásicos. Para tener cierta práctica, calculemos los valores discretos posibles del producto escalar

$L_1 L_2$ por medio de l_1, l_2 y J. Con este objetivo, la igualdad

$$J = L_1 + L_2$$

se eleva al cuadrado (siguiendo las reglas ordinarias), y para L_1^2, L_2^2 y J^2 se recurre a las expresiones «cuánticas» (1.24):

$$J(J+1) = l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) + 2L_1L_2,$$

es decir,

$$L_1L_2 = \frac{1}{2}[J(J+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)]. \quad (1.31)$$

Sustituyendo J por sus posibles valores desde $|l_1 - l_2|$ hasta $l_1 + l_2$, obtendremos un juego de valores discretos posibles del producto escalar L_1L_2.

Los vectores L_1 y L_2 pueden referirse a una partícula (digamos, uno de los vectores es el momento orbital, y el otro, el de espín), o bien, a diferentes (por ejemplo, se puede dar la pregunta: ¿a qué es igual el momento de dos partículas si el de una es L_1 y el de otra L_2?).

La regla de adición de los vectores nos ayudará a esclarecer cuál puede ser el espín del sistema que consta de varios electrones.

Comencemos por dos electrones. Como cada uno de los espines puede orientarse tan sólo según el eje o en contra de éste, son posibles únicamente las siguientes situaciones: 1) los espines son «antiparalelos» uno respecto a otro, el espín total es igual a cero ($S = 0$); 2) los espines son «paralelos» uno respecto a otro, el espín total es igual a la unidad ($S = 1$).

Las palabras «paralelos» y «antiparalelos» están puestas entre comillas por cuanto dos proyecciones (s_x y s_y) del espín del electrón, al igual que de cualquier momento, no tienen valor determinado.

Entre los estados con $S = 0$ y $S = 1$ hay una diferencia esencial. El estado con espín cero es único (éste se denomina precisamente así: singulete *)). Ahora bien, puede haber tres estados con espín igual a la unidad: con $S_z = -1$, 0 y 1. Semejante estado se llama triplete **).

Con el fin de sentir todvía más claramente la diferencia entre los momentos clásicos y cuánticos, calculemos el valor de s_1s_2 para $S = 0$ y para $S = 1$ (s_1 y s_2 son los vec-

---

*) De la palabra latina *singularis* que significa único.
**) De la palabra latina *triplex* que significa triple.

4—1598

tores de los espines del primero y segundo electrón, $s_1 = s_2 = 1/2$). Notemos que el espín igual a 1/2 es mínimo entre los momentos que se encuentran en la naturaleza, salvo el momento cero, claro está. Para el mismo, la diferencia entre las propiedades cuánticas y clásicas es máxima*).

De acuerdo con la fórmula (1.31)

$$s_1 s_2 = \begin{cases} -3/4 & \text{para } S = 0, \\ 1/4 & \text{para } S = 1. \end{cases} \tag{1.32}$$

Si los momentos hubieran sido clásicos, los productos $s_1 s_2$ para los espines «paralelos» y «antiparalelos» se diferenciarían sólo por el signo y serían iguales a $\pm s^2 = \pm 1/4$.

Tabla II

	$S = 0$	↑↓ − ↓↑
	$S_z = -1$	↓↓
$S = 1$	$S_z = 0$	↑↓ + ↓↑
	$S_z = 1$	↑↑

En la tabla II se ve qué valores tienen las proyecciones de los espines de cada electrón en estado de singulete y de triplete (la flecha hacia abajo representa el estado del electrón aislado, con $s_z = -1/2$; y la flecha hacia arriba, con $s_z = 1/2$).

Fíjense por favor en el hecho de que la configuración de espín puede ser antisimétrica ($S = 0$) y simétrica ($S = 1$). Analizando la tabla es fácil comprender que se trata de la reordenación de los electrones. La comprensión de la simetría de las configuraciones de espín ayudará a entender el concepto de *energía de intercambio*, tan importante para la teoría del magnetismo.

Como es fácil de entender, tres electrones pueden tener el espín igual a 1/2 ó 3/2. En general, el número par de electrones crea configuraciones con espín entero (en particular, con espín cero), y el número impar de electrones, con espín semientero.

*) Para $s = 1/2$ el cuadrado de la longitud del vector $s(s+1) = 3/4$ es el triple del cuadrado de la proyección $s_z^2 = s^2 = 1/4$.

Examinemos ahora el sistema de varios electrones. Sea que el momento orbital de los electrones es igual a L, y el de espín, a S. Recuerden que prefijar los momentos significa prefijar sus longitudes L y S y sus proyecciones sobre el eje elegido L_z (uno de los números: $-L, \ldots, +L$) y S_z $(-S, \ldots, +S)$. ¿Qué momento magnético poseerá este sistema de electrones?

Si la cuestión se precisa en cierto grado, la respuesta se obtendrá casi automáticamente. Las propiedades rotatorias del sistema se caracterizan por el momento total de la cantidad de movimiento $J = L + S$, cuya proyección máxima J, en consonancia con lo anterior, puede tomar valores desde $|L - S|$ hasta $L + S$. El momento magnético M es proporcional a J, con la particularidad de que al coeficiente de proporcionalidad lo hemos llamado relación giromagnética. De este modo,

$$M = g\mu J, \quad \mu = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \tag{1.33}$$

la tarea se reduce a buscar la magnitud del factor g como función de L, S y J. Recuerden que la tarea surgió debido a que las relaciones giromagnéticas para los momentos orbital y propio son diferentes ($g_L = 1$, $g_s = 2$).

Teniendo en cuenta la diferencia de los factores g, para el momento magnético se puede escribir la siguiente expresión:

$$M = \mu(\overline{L} + 2\overline{S}) = \mu(J + \overline{S}). \tag{1.33'}$$

La raya sobre los vectores L y S significa que se toman sus valores medios. El asunto reside en que se conserva (tiene un valor estacionario determinado) tan sólo el momento total de la cantidad de movimiento J (por esta razón sobre



FIG. 15. *Cuadro clásico de la «precesión» de los momentos orbital L y de espín S alrededor del momento total J.*

ésto no se pone una raya), mientras que los vectores L y S realizan un movimiento de precesión alrededor de J (fig. 15). De acuerdo con la fórmula (1.33′) nos interesará el vector $\overline{S}$ que, naturalmente, está dirigido a lo largo del vector J *) (esto se ve con claridad en la fig. 15), es decir, $\overline{S} = aJ$. La constante a se determina fácilmente a base de la siguiente cadena de igualdades:

$$\overline{JS} = J\overline{S} = aJ^2 = aJ\,(J+1).$$

Nótese: para J^2 nos hemos aprovechado otra vez de la fórmula cuántica. El valor de JS se calcula completamente igual que al ser obtenido por la fórmula (1.31):

$$JS = \frac{1}{2}\,[J\,(J+1) - L\,(L+1) - S\,(S+1)].$$

Por consiguiente,

$$a = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{L\,(L+1) - S\,(S+1)}{J\,(J+1)}\right].$$

Al comparar las fórmulas (1.33) y (1.33′), obtenemos la expresión buscada para el factor g:

$$g = 1 + \frac{J\,(J+1) - L\,(L+1) + S\,(S+1)}{2J\,(J+1)}. \qquad (1.34)$$

Si falta el espín ($S = 0$), entonces, como es natural, $J = L$ y $g = 1$; en cambio, si $L = 0$ y $J = S$, entonces $g = 2$. Para $J = 0$, lo que es posible cuando $L = S$, la expresión (1.33) no está determinada, pero, por supuesto, no hay ningún momento magnético ya que todas las proyecciones del vector M son iguales a cero.

El factor de Landé g puede ser igual a cero también cuando $J \neq 0$, por ejemplo, para $L = 2$, $S = 3/2$ y $J = 1/2$. Este ejemplo demuestra que el factor g no se «dispone», ni mucho menos, entre el uno y el dos.

Hagamos el balance: si el sistema de electrones tiene un momento total, determinado de la cantidad de movimiento J que es la suma de los momentos orbital L y de espín S, el momento magnético de tal sistema de electrones es igual al

---

*) Olvidando temporalmente el «carácter cuantificado» del vector S, descompónganlo en dos vectores: uno dirigido a lo largo del vector J, y el segundo, $S_\perp$, que es perpendicular al primero, gira en torno a J. Por eso $\overline{S_\perp} = 0$.

vector «cuántico» M (véase (1.33)) cuyas proyecciones sobre el eje elegido son $\mu g m_J$, donde m_J toma uno de los siguientes valores: $-J$, $-J+1$, . . ., $J-1$, J, mientras que el factor g viene definido por la fórmula (1.34).

§ 9. ESTRUCTURA DE LOS ÁTOMOS

Todos los átomos, menos el más simple, el de hidrógeno, contienen más de un electrón. Los átomos de las sustancias que acusan propiedades magnéticas altamente manifiestas (por ejemplo, los átomos de los elementos de transición) son sistemas complejos multipartitos. No se pueden obtener datos precisos sobre el movimiento del sistema constituido por un gran número de partículas. Incluso en la mecánica clásica se resuelve exactamente tan sólo el problema sobre el movimiento de dos partículas. Sin embargo, resulta que para dar la explicación (en todo caso, cualitativa) de las propiedades de los átomos es suficiente comprender las particularidades muy generales del movimiento de los electrones en el átomo. Precisamente ahora procederemos a su descripción.

Mentalmente hay que figurarse el sistema periódico de Mendeléev, en el que los elementos vienen dispuestos de acuerdo con el número atómico Z, o sea, de acuerdo con el número de electrones en la envoltura electrónica o el número de protones en el núcleo. Nuestra tarea inmediata consiste en comprender por qué los átomos con distintos Z tienen propiedades diferentes y, por el contrario, por qué los átomos situados en lugares análogos de la tabla de Mendeléev (sus Z, claro está, son diferentes) poseen propiedades similares. Por supuesto, prestaremos la principal atención a las propiedades magnéticas de los átomos.

Ahora imaginémonos el átomo: el núcleo es un «coágulo» inmóvil *) de protones y neutrones, la fuente de un campo de fuerza en el que se mueven los electrones. ¿Cómo puede explicarse el hecho de que la añadidura de un solo electrón a los dieciocho transforma el átomo del gas inerte argón en átomo del metal potasio?

Comencemos por precisar qué fuerzas actúan sobre los electrones.

---

*) Pasamos al sistema de coordenadas en el que descansa el núcleo.

Al parecer, la respuesta es evidente: las fuerzas coulombianas electrostáticas de atracción al núcleo y las fuerzas de repulsión de los electrones unos de otros (ya hemos hablado sobre esto). Pero después de que hemos tratado de persuadir al lector (y abrigamos la esperanza de que lo hemos logrado) de que cada electrón, además de ser portador de una carga, también es un pequeño imán (dipolo magnético), la cuestión sobre las fuerzas adquiere un nuevo sentido: ¿es necesario, al investigar el movimiento de los electrones, tomar también en consideración su interacción magnética de unos con otros y con el núcleo?

En primer término, ¿qué es la «interacción magnética»? Su resultado es de común conocimiento: los polos magnéticos de un mismo signo se repelen, y los de signos opuestos se atraen. La respuesta a la pregunta «¿qué es...?» significa la deducción de la relación entre la fuerza y la distancia entre los imanes (dipolos magnéticos). A diferencia de las fuerzas electrostáticas que dependen solamente de la distancia entre las cargas, las fuerzas magnéticas dependen no sólo de la distancia entre los dipolos, sino también de la disposición recíproca de las «flechitas magnéticas» y de su situación respecto a la línea que las une (fig. 16). No nos ocuparemos en deducir la expresión para la fuerza de interacción de los dipolos magnéticos, válida para distancias grandes en comparación con las dimensiones del dipolo. Para los electrones esta fórmula es exacta, ya que los mismos deben considerarse como partículas puntuales. Insertaremos la expresión no para la fuerza, sino para la energía de interacción U_M:

$$U_M = \frac{(M_1 M_2) - 3(M_1 n_{12})(M_2 n_{12})}{R_{12}^3}; \quad n_{12} = \frac{R_{12}}{R_{12}}. \quad (1.35)$$

Aquí M_1 y M_2 son los momentos magnéticos de dos partículas, y R_{12}, la distancia vectorial entre éstas. El punto de referencia de la energía se ha elegido de tal manera que ésta

FIG. 16. *La fuerza de interacción de los dipolos magnéticos depende no sólo de la distancia entre éstos, sino también de su orientación: a) los dipolos magnéticos se atraen ($U_M < 0$); b, c) se repelen ($U_M > 0$); d) el signo de la energía U_M se determina por la fórmula (1.35).*

sea igual a cero con el alejamiento infinito de los dipolos magnéticos uno del otro (para $R_{12} \to \infty$).

De la fórmula (1.35) queda claro que ésta describe correctamente la atracción de los polos de signo contrario (es decir, de los dipolos magnéticos paralelos unos a otros y a la línea que los une) y la repulsión de los polos homónimos (es decir, de imanes antiparalelos situados a lo largo de la línea que los une) *).

Cuando se trata de los electrones en el átomo, la energía magnética de interacción entre dos partículas según el orden de su magnitud es

$$U_M \approx \frac{\mu^2}{a^3}.$$

donde μ es el magnetón de Bohr, y a, la distancia media entre los electrones, igual, aproximadamente, a las dimensiones del átomo (es la misma fórmula que (1.35); hemos sustituido $M_{1,2} \to \mu$, $R_{12} \to a$ y omitido la relación angular en el numerador).

No tiene sentido evaluar la energía de interacción magnética del electrón con el núcleo: ésta, a ciencia cierta, es mucho menor que U_M por cuanto el momento magnético del núcleo es miles de veces menor que el momento magnético del electrón; el primero se compone de los momentos magnéticos de los protones y neutrones que son miles de veces menores que el electrónico (véase la tabla I).

La energía de interacción electrostática entre dos electrones, en las mismas condiciones, es igual a

$$U_{\text{coul}} = \frac{e^2}{a}.$$

Al dividir la expresión para U_M por la expresión para U_{coul} y omitir los factores del orden de la unidad, tendremos

$$\frac{U_M}{U_{\text{coul}}} \approx \frac{(\hbar^2/a^2 m_e)}{m_e c^2},$$

¡Es una fórmula bastante significativa! En su denominador vemos la energía de reposo del electrón $m_e c^2$, y en el numerador, una combinación insólita de la dimensión de energía

---

*) *Problema 9.* Deduzcan la fórmula (1.35). Esto se puede hacer valiéndose de la fórmula (1.26) para la energía del dipolo magnético en el campo magnético, considerando que el campo H ha sido creado por otro dipolo (véase la fórmula (1.7)).

(¡comprueben esta afirmación!). Comprender la esencia de esta combinación se puede por dos vías. En primer lugar, dirigiéndose a la fórmula (1.21) para la energía del electrón en el átomo de hidrógeno y expresando esta última por medio del radio de la «órbita» $a_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$ (pág. 34). Se ve que, según el orden de la magnitud, $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e}$ es $|\varepsilon_n|$, o sea, la energía del electrón en el átomo. En segundo lugar, haciéndose uso de las relaciones de indeterminación (§ 4) de acuerdo con las cuales es imposible delimitar la partícula por una región del espacio del orden a, si la misma no se mueve. El impulso mínimo de la partícula que se encuentra en la región del orden a es $p \approx \frac{\hbar}{a}$. Por consiguiente, $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e} \approx$ $\approx \frac{p^2}{m_e}$ es la energía cinética del movimiento del electrón en al átomo E_{cin} (según el orden de la magnitud, claro está, pues hemos omitido incluso el dos). El segundo enfoque sea, tal vez, menos convincente, pero él demuestra que $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e}$ caracteriza la energía de movimiento de cualquier electrón en cualquier átomo, y no sólo en el átomo de hidrógeno. Para evaluar las dimensiones del átomo puede utilizarse, con buena precisión, la magnitud $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ cm que emplearemos, precisamente, en adelante. Con otras palabras,

$$\frac{U_M}{U_{\text{coul}}} \approx \frac{E_{\text{cin}}}{m_e c^2} = \frac{v^2}{c^2}; \quad v = \frac{\hbar}{a m_e}.$$

Los electrones en los átomos se mueven con pequeña velocidad en comparación con la de la luz *). En efecto, al dividir el impulso medio $\hbar/a = 10^{-27}/3 \cdot 10^{-8}$ por la masa del electrón $m_e \approx 10^{-27}$ g, nos cercioramos de que $v \approx$ $\approx 3 \cdot 10^7$ cm/s, lo que es mucho menor que la velocidad de la luz.

De este modo, la relación U_M/U_{coul} es mucho menor que la unidad, o sea, la energía de interacción magnética U_M es mucho menor que la de interacción electrostática U_{coul}: $U_M \ll U_{\text{coul}}$. Esta deducción es tan importante para lo ulterior que conferiremos a la relación U_M/U_{coul}

---

*) Por cierto, en los átomos pesados que incluyen un gran número de electrones, existen electrones (que se mueven en las profundidades del átomo, cerca de su núcleo) cuya velocidad es parecida a la de la luz.

una forma aún más «impresionante», sustituyendo a por la expresión para el «radio» del átomo de hidrógeno en estado fundamental $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ (véase la pág. 34). Entonces

$$\frac{U_M}{U_{coul}} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \approx \left(\frac{1}{137}\right)^2. \qquad (1.36)$$

Inesperadamente, la desigualdad $U_M \ll U_{coul}$ resultó ser la consecuencia de la pequeñez (¡!) de la carga eléctrica (véase la pág. 13).

Cabe señalar que el papel de las combinaciones adimensionales, formadas de las constantes universales (en el caso dado, de e, $\hbar$ y c), es extraordinariamente grande. Podemos formular la siguiente tesis semichistosa: nuestro mundo es tal como es precisamente a causa de que varias combinaciones adimensionales de las constantes universales tienen los valores que tienen: $\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$; $\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1840}$; $\frac{e^2}{\gamma m_p^2} \approx 4 \cdot 10^{42}$, etc. ¿Qué significan estos números? ¿Por qué son precisamente éstos y no otros? Por ahora la ciencia no puede contestar a tales preguntas.

De este modo, hemos aclarado que el papel determinante le pertenece a la interacción electrostática de los electrones. Con otras palabras, al «construir» el átomo a partir de electrones se puede despreciar el hecho, tan importante para nuestro tema, de que los electrones son imanes. En el acto hagamos constar: no se puede hacer caso omiso de la existencia del espín en el electrón, y pronto nos convenceremos de ello.

Para esclarecer el cuadro general del movimiento de los electrones en el átomo se puede considerar que la fuerza *media* que actúa sobre cada electrón por parte del núcleo y de todos los demás electrones (excepto el examinado) posee simetría central (el centro de simetría coincide con el núcleo). El estado estacionario de cada electrón en un campo de este tipo puede caracterizarse por un momento determinado de la cantidad de movimiento, cuyo valor se prefija mediante los números cuánticos l ($l = 0, 1, 2, \ldots$) y m ($m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$; véase antes). Resulta que estos números son insuficientes para prefijar el estado del electrón. Es necesario introducir un número más que determine el estado del electrón. El mismo se denomina número cuántico principal y se designa con la letra n; dicho número toma los valores de 1, 2, 3, . . . Los tres números n, l y m definen

el estado del movimiento orbital del electrón en el átomo. Recuerden que el movimiento libre del electrón también lo determinan tres números: tres proyecciones de su impulso. Los números l y n no son del todo independientes: siempre $l \leqslant n - 1$.

El estado de espín del electrón se determina por el valor de la proyección de su espín sobre uno de los ejes. Designemos el valor de la proyección del espín con la letra σ; σ toma dos valores: $+1/2$ y $-1/2$. De este modo,

el estado del electrón en el átomo lo determinan cuatro números: n, l, m y σ:

$$n = 1,\ 2,\ \ldots;$$
$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$
$$m = -l,\ -l+1,\ \ldots,\ l-1,\ l;$$
$$\sigma = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.$$

La energía del electrón depende débilmente de dos de los cuatro números cuánticos, a saber, de m y σ. En la primera aproximación esta dependencia puede despreciarse totalmente. Dicha circunstancia facilita considerablemente la descripción de la estructura del átomo. El hecho de que prescindimos de la dependencia de la energía del electrón respecto a m y σ es resultado de haber soslayado la interacción magnética (véase (1.35)), así como (¡y primordialmente!) debido a la isotropía del espacio que rodea la envoltura electrónica del átomo. En efecto, ¿qué tiene que ver hacia dónde está dirigido el momento de la cantidad de movimiento si todas las direcciones son equivalentes? El hecho es que la «responsable» de la dirección del momento es la magnitud de su proyección m. Este enunciado tiene una analogía clásica: la energía de la partícula que se mueve en un campo con simetría central no depende de la orientación de su proyección en el espacio.

A n y l pequeños les corresponde una energía pequeña $\varepsilon(n, l)$, y con el crecimiento de n y l la energía, por regla general, también se incrementa. Para el átomo de hidrógeno hemos citado la correlación $\varepsilon = \varepsilon(n)$ (véase la fórmula (1.21)). Debido a circunstancias fortuitas (en cierta medida), la energía del átomo de hidrógeno no depende de l.

Los estados con diferentes valores de l, independientemente del valor de n, suelen designarse (siguiendo la tradi-

ción histórica) con letras minúsculas del alfabeto latino, manteniendo la siguiente correspondencia:

s p d f g . . . y más adelante según el alfabeto:
$l = 0\ 1\ 2\ 3\ 4$ . . .

El estado de un electrón aislado en el átomo (sin indicar los valores de m y σ) se designa con el símbolo constituido por la cifra que señala el valor del número cuántico principal n y la letra correspondiente al valor de l. Por ejemplo, el símbolo $3p$ significa el estado del electrón con $n = 3$ y $l = 1$. Si varios electrones se hallan en un estado con n y l iguales, tal caso suele denotarse en forma de exponente (*la unidad no se pone*). Así, por ejemplo, $3p^2$ quiere decir que en estado $3p$ ($n = 3$, $l = 1$) se encuentran dos electrones.

La distribución de los electrones en el átomo determina la *configuración electrónica* de éste, o sea, su envoltura electrónica. ¿Acaso es posible toda configuración? En particular, ¿cuántos electrones pueden hallarse en estados con los mismos n y l? ¿Cuál es el máximo «exponente» en los símbolos de tipo $3p$ ó $4d$?

En la física clásica esta pregunta se hubiera reducido a la de cuántas partículas iguales pueden tener energías y momentos idénticos. La respuesta inmediata y natural sería: tantas cuantas se quieran. En la física cuántica el asunto toma un cariz completamente distinto. Y he aquí por qué.

PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI

En la física clásica y en la cuántica las partículas iguales se comportan de un modo completamente diferente. Las partículas clásicas, incluso en el caso de absoluta identidad, se mueven describiendo cada una su trayectoria. Si en el momento inicial de tiempo se ha registrado la posición de cada una de las partículas, entonces, en cualquier momento consiguiente, al fijar de nuevo las partículas en el espacio, en sus trayectorias, se puede indicar qué partícula y dónde se encuentra, es decir, se puede distinguir una partícula de otra. En la mecánica cuántica la situación es por completo diferente, puesto que las partículas no se mueven describiendo trayectorias. Después de haber registrado la partícula en el momento inicial de tiempo no tenemos la posibili-

dad, en principio, de descubrirla entre sus semejantes en los momentos sucesivos de tiempo.

En la mecánica cuántica las partículas idénticas son absolutamente indistinguibles

Este enunciado constituye el contenido del principio de la identidad de las partículas iguales *). Del mismo se desprende que la reordenación de las partículas idénticas no implica la variación del estado cuántico del sistema.

Analicemos la función de onda de dos partículas $\Psi(1, 2)$. Las cifras 1 y 2 denotan simbólicamente las coordenadas (teniendo en cuenta la variable que indica la dirección del espín) de la primera y la segunda partícula. La reordenación de las dos partículas (la primera ocupa el sitio de la segunda, y la segunda, el de la primera) se describe por medio de la permutación de los argumentos de la función $\Psi(1, 2)$:

$$\Psi(1, 2) \rightarrow \Psi(2, 1).$$

Para esta operación no debe variar el estado del sistema. Pero esto significa que durante la permutación, la función de onda sólo puede adquirir un factor constante (véase la pág. 33). Designémoslo con la letra α. Entonces, $\Psi(2, 1) = \alpha\Psi(1, 2)$. Al realizar una doble reordenación de las partículas, es decir, al retornar a su disposición inicial, nos cercioramos de que $\alpha^2 = 1$ y, por consiguiente, ya sea que $\alpha = 1$, o bien, $\alpha = -1$. El valor del factor α viene condicionado no por el estado del sistema, sino por el tipo de partículas que constituyen este último.

Como el factor α es igual a $+1$ ó a -1, existen dos tipos de partículas:

para unas partículas la reordenación (el cambio de sitio) no conduce a la variación de la función de onda:

(B) $$\Psi(2, 1) = \Psi(1, 2); \qquad (1.37)$$

para otras, durante su reordenación la función de onda cambia de signo:

(F) $$\Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2). \qquad (1.38)$$

Acabamos de exponer una propiedad de las partículas carente de análogo clásico alguno. La mecánica cuántica

---

*) ¡Cuánto se facilita la composición del cuadro del Universo! Al construir la teoría de *un* electrón hemos creado la teoría de *todo* electrón.

condujo al descubrimiento de propiedades no vinculadas con la interacción de fuerza entre las partículas; éstas hasta pueden no entrar en interacción unas con otras, pero las leyes de permutación descritas más arriba deben obedecerse *indispensablemente*. La naturaleza (la mecánica cuántica) impone a las partículas las reglas de conducta en una colectividad, pues queda evidente que, al generalizar las relaciones (1.37) y (1.38), podemos examinar los conjuntos de cualquier número de partículas. El apartado de la física que se dedica a la investigación del comportamiento de conjuntos grandes (macroscópicos) de partículas lleva el nombre de *física estadística*. Se dice sobre las partículas para las cuales se cumple la relación (1.37), que éstas están sujetas a la *estadística de Bose — Einstein*, y cuando se trata de partículas para las cuales se cumple la relación (1.38), se indica que éstas se subordinan a la *estadística de Fermi — Dirac*. Por eso a la izquierda de las igualdades (1.37) y (1.38) se colocan las letras (B) y (F), respectivamente.

¿Posiblemente la partícula tenga alguna propiedad «personal» que determine su subordinación a una de las dos estadísticas? Resultó que sí. Como demostró Pauli,

las partículas de espín nulo o entero se subordinan a la estadística de Bose — Einstein, y las de espín semientero, a la estadística de Fermi — Dirac.

Se pone de manifiesto por qué las partículas de espín entero o nulo fueron llamadas bosones, y las de espín semientero, fermiones (véase la pág. 46).

Ahora volvamos a plantear el problema de cuántos electrones pueden encontrarse en un estado. En primer lugar, recordemos que el espín del electrón es igual a 1/2 y, por lo tanto, los *electrones pertenecen a los fermiones*. En segundo lugar, formulemos uno de los principios fundamentales de la física atómica, el *principio de exclusión de Pauli*:

en cada estado puede encontrarse no más de un electrón.

Vamos a demostrar el principio de exclusión de Pauli utilizando la antisimetría de la función de onda de dos electrones. A lo que sabemos de la función de onda (véase la pág. 33) debemos añadir: la función de onda de dos partículas que no interaccionan se construye en forma de combinación bilineal de las funciones de onda de partículas aisladas. De este modo, supongamos que un electrón se halla en

el estado $\{n, l, m, \sigma\} \equiv \{i\}$, y otro, en el estado $\{n', l', m', \sigma'\} \equiv \{i'\}$. En este caso, de acuerdo con la regla (1.38),

$$\Psi(1, 2) = \Psi_{\{i\}}(1)\ \Psi_{\{i'\}}(2) - \Psi_{\{i'\}}(1)\ \Psi_{\{i\}}(2).$$

De aquí se infiere: si los estados $\{i\}$ e $\{i'\}$ coinciden ($\{i\} \equiv \{i'\}$), la función de onda es idénticamente igual a cero; tal estado no existe.

Vemos que los fermiones son individualistas, no aguantan a sus semejantes.

Cada sistema físico tiende a encontrarse en un estado de energía mínima *). Esta circunstancia más el principio de exclusión de Pauli permiten comprender la estructura de los átomos y, junto con ello, la naturaleza de la ley periódica de Mendeléev. En esencia, el problema se reduce a la disposición de los Z electrones del átomo con el número atómico Z según los estados, teniendo en cuenta que:

1) a los estados con distintos m y σ, pero con n y l iguales, corresponde igual energía, y

2) el conjunto total de números cuánticos $\{n, l, m, \sigma\}$ puede tener solamente un electrón.

El número de estados con un valor determinado de l es igual a $2(2l + 1)$. Por cuanto l no puede ser mayor que $n - 1$, a cada valor de n le corresponden tan sólo varios l: para $n = 1$, solamente $l = 0$ (estado s); para $n = 2$ tenemos $l = 0$ y $l = 1$, o sea, los estados s y p, etc. Es fácil calcular cuántos electrones pueden tener n y l coincidentes para sus valores arbitrarios **) y componer una tabla.

Tabla III

1s	2 electrones
2s, 2p	8 »
3s, 3p	8 »
4s, 3d, 4p	18 »
5s, 4d, 5p	18 »
6s, 4f, 5d, 6p	32 »

La tabla III indica la distribución del número de estados por grupos con n y l determinados. La comparación de esta tabla con el sistema periódico de Mendeléev demuestra que

*) Volveremos una vez más a esta tesis en el siguiente capítulo.

**) Los electrones con n y l iguales forman una «*envoltura*».

los períodos del sistema periódico son el resultado de la agregación consecuente de electrones a los estados con diferentes n y l *dispuestos en grupos*. El primer grupo se llena en átomos de H y He. En He tiene repleta una envoltura. La agregación de electrones a la segunda y tercera envolturas corresponde a los dos primeros (pequeños) períodos del sistema periódico, que contienen ocho elementos cada uno (dichos períodos terminan en Ne y Ar, respectivamente). A continuación van dos períodos grandes de 18 elementos cada uno (hasta Kr y Xe, respectivamente) y un período de 32 elementos (hasta Rn); el último grupo de estados tan sólo comienza a llenarse en los elementos existentes.

La repetición de las propiedades químicas de los átomos al pasar de un período a otro está relacionada con el hecho de que en estas propiedades el papel más sustancial lo desempeñan los electrones periféricos, o sea, aquellos que se encuentran fuera de la envoltura completada (por desgracia no tenemos la posibilidad de detenernos detalladamente en este tema).

El orden de disposición de los estados en la tabla III, correspondiente a la secuencia de agregación de electrones, guarda relación con la variación de la energía en función de n y l. Observando los primeros renglones de la tabla se puede formular una regla sencilla: al principio se llenan los estados con n mínimos y con todos l admisibles, y luego se produce la transición al n siguiente. Sin embargo, en el cuarto renglón y en todos los siguientes, las cosas no resultan ser tan simples. Por ejemplo, primero (según la tabla) deben completarse los estados $4s$ y después $3d$. En realidad, si echamos una ojeada a las configuraciones electrónicas del grupo de hierro (desde Sc hasta Ni), se ve que las envolturas $4s$ y $3d$ rivalizan en su relleno: por ejemplo, después del V, que tiene tres electrones en estado $3d$ y dos en $4s$, viene Cr con cinco electrones en estado $3d$ y uno en $4s$, mientras que el Mn posee cinco electrones en estado $3d$ y dos en $4s$.

Para acercarnos al tema de nuestro relato sobre las propiedades magnéticas anotemos que los conjuntos de electrones que llenan por completo el grupo de estados con n y l prefijados, poseen un momento nulo total tanto orbital como de espín. Dicha circunstancia está relacionada con el hecho de que para la agregación de electrones es necesario que estos últimos tengan proyecciones opuestas de los momentos (véase la pág. 39).

Como ejemplo, en la tabla IV se dan las configuraciones electrónicas de algunos elementos.

En la última columna de la tabla se encuentra el símbolo (término) que reúne la información necesaria sobre las propiedades de la configuración electrónica de un átomo dado en estado fundamental. La estructura del símbolo es como sigue: la letra latina mayúscula designa el momento orbital total de la configuración electrónica con la siguiente correspondencia (compárese con la pág. 59):

Tabla IV

Elemento	Z	Configuración	Término
H	1	$1s$	$^2S_{1/2}$
He	2	$1s^2$	$^1S_0$
Li	3	$1s^22s$	$^2S_{1/2}$
Be	4	$1s^22s^2$	$^1S_0$
B	5	$1s^22s^22p$	$^2P_{1/2}$
. . . . . .		. . .	. . . . . .
Al	13	$1s^22s^22p^63s^23p$	$^2P_{1/2}$
. . . . . .		. . .	. . . . . .
Ar	18	$1s^22s^22p^63s^23p^6$	$^1S_0$

$S\ P\ D\ F\ \ldots$ y más adelante según el alfabeto:
$L = 0\ 1\ 2\ 3\ \ldots$

El subíndice designa el valor del momento total J, y el índice de arriba, la multiplicidad, es decir, el valor de $2S + 1$, donde S es el espín total de los electrones del átomo. El término del Be es $^1S_0$, o sea, $L = 0$, $J = 0$, $S = 0$; el término del Al es $^2P_{1/2}$, o sea, $L = 1$, $J = 1/2$ y $S = 1/2$.

Observando el término del átomo es fácil, a base de la regla que acabamos de formular, calcular su factor g y determinar su momento magnético.

Se han elaborado métodos de cálculo bastante exactos y existen reglas relativamente sencillas (reglas de Hund) que permiten determinar los términos de todos los átomos. Asimismo la *mecánica cuántica resolvió el problema de los momentos magnéticos de las unidades estructurales mínimas de la sustancia, o sea, de los átomos.* Aunque entre estos últimos

se encuentran algunos cuyos términos llevan cero a la derecha, es decir, $J = 0$ (por ejemplo, los átomos de todos los gases inertes), la mayoría de los átomos posee un momento total distinto a cero y, por consiguiente, aquéllos son imanes microscópicos.

Para concluir este párrafo representemos la estructura electrónica del átomo «más magnético», del de hierro (ferrum) Fe, cuyo nombre sirvió de base para denominar la propiedad «más magnética», el *ferromagnetismo*

$$\text{Fe: } \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6}_{\text{envoltura de argón}} 3d^6 4s^2 \text{ término } {}^2D_4.$$

§ 10. ENERGÍA DE INTERCAMBIO

Analicemos los términos de los átomos. Por ejemplo, la configuración electrónica del Mn ($Z = 25$) es la siguiente: envoltura Ar + $3d^5 4s^2$, y su término ${}^6S_{5/2}$. ¿Por qué el espín de los electrones de manganeso es igual a 5/2? Pues está claro que el principio de exclusión de Pauli no prohíbe a los electrones tener también otras proyecciones de los espines. ¿Qué obligó a todos los cinco electrones a alinearse «paralelamente»?

Otro ejemplo lo tomemos no de la teoría del átomo, sino de la de las moléculas. La molécula más simple es la de hidrógeno H_2. Dos electrones se mueven alrededor de dos protones creando una configuración estable. Dos electrones pueden tener un espín S igual a 1 ó 0. Los electrones en H_2 tienen un espín igual a cero. ¿Por qué? Estos interrogantes requieren una respuesta y la misma no es trivial. Se trata de que la *causa de la realización de una u otra configuración de espín no está ligada con la interacción magnética de los electrones*, aunque es evidente que la elección de la configuración de espín depende de la ventaja energética: se realiza aquella que posee menor energía.

Al principio del párrafo anterior hemos demostrado que la interacción magnética es pequeña y puede despreciarse sin pérdidas considerables. Pero en este caso sólo queda la interacción electrostática que es insensible al estado de espín de los electrones. En efecto, tanto los electrones cuyos espines son «paralelos», como aquellos cuyos espines son «antiparalelos» se repelen entre sí con igual fuerza, la cual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

5—1598

entre éstos. ¿Por qué, entonces, el espín de los electrones de manganeso es igual a 5/2, mientras que en la molécula de hidrógeno éste equivale a cero? Aparentemente no debería existir relación alguna entre la energía de un sistema electrónico y su espín, en todo caso hasta el momento en que tomemos en consideración la interacción magnética. En realidad existe relación. Ésta surge debido a la antisimetría de la función de onda de los electrones.

Para simplificar, examinemos un sistema que consta de dos electrones enlazados tan sólo por las fuerzas electrostáticas. El hecho de que prescindimos de la interacción magnética significa que, al resolver el problema sobre la energía del sistema, podemos, en general, olvidarnos de los espines de los electrones. Supongamos que $\psi(r_1, r_2)$ es la función de onda que describe el movimiento *orbital* de los electrones. Hemos recalcado este hecho escribiendo expresamente los argumentos de la función de onda, o sea, las coordenadas de los electrones r_1 y r_2; las variables de espín han sido omitidas. Pero no podemos olvidar del todo las variables de espín, por cuanto la función de onda total $\Psi(1, 2)$ debe ser antisimétrica (véase (1.38)). Tenemos que limitarnos a constatar el hecho de que la función de onda total $\Psi(1, 2)$ es el producto de la función de espín $S(\sigma_1, \sigma_2)$ que describe el estado de espín de los electrones (σ_1 y σ_2 son las variables de espín), y de la función orbital $\psi(r_1, r_2)$ que describe su movimiento orbital:

$$\Psi(1, 2) = S(\sigma_1, \sigma_2)\,\psi(r_1, r_2).$$

Hemos visto (tabla II en la pág. 50) que la configuración de espín puede ser simétrica (para $S = 1$) o antisimétrica (para $S = 0$). Mas toda función $\Psi(1, 2)$ es antisimétrica. Por consiguiente, a una función de espín simétrica corresponde una función orbital antisimétrica, y viceversa. De aquí se desprende la siguiente afirmación:

para $S = 0$ $\psi(r_1, r_2) = \psi_s$, *función simétrica*
para $S = 1$ $\psi(r_1, r_2) = \psi_a$, *función antisimétrica*,

Las funciones simétricas y antisimétricas ψ_s y ψ_a describen movimientos orbitales *diferentes* de los electrones, por cuya causa les corresponden diferentes energías. Y cuál de las energías resultará menor depende del problema concreto. En la molécula de hidrógeno la energía mínima corresponde a la función de onda simétrica que describe el movimiento

orbital. Precisamente por esta causa el espín electrónico del H_2 es igual a cero.

Al resultado obtenido aquí, o sea, la variación de la energía del sistema de electrones en relación con la simetría de la función de onda y, como consecuencia, en relación con el espín, se le puede conferir una forma que permita hablar acerca de la *interacción de intercambio sui géneris entre los electrones.*

Designemos con E_s la energía de los electrones correspondiente a la función de onda ψ_s, y con E_a, la energía correspondiente a ψ_a. De lo expuesto anteriormente sabemos que existe una correspondencia entre la energía del sistema y su espín:

$$E_s \leftrightarrow S = 0,$$
$$E_a \leftrightarrow S = 1.$$

De los espines de los electrones compondremos una expresión (conocida con el nombre de *hamiltoniano de espín* y cuyo símbolo es $\mathcal{H}_S$ *)) que para $S = 0$ toma el valor de E_s, y para $S = 1$, el de E_a.

Con este fin haremos uso de la fórmula (1.32):

$$\mathcal{H}_S = \frac{1}{4}(E_s + 3E_a) + (E_a - E_s)\, s_1 s_2.$$

Los valores que toma el hamiltoniano de espín $\mathcal{H}_S$ no son sino los valores posibles de la energía del sistema de dos electrones (aquellos mismos E_s y E_a que hemos mencionado antes). El primer sumando $\frac{1}{4}(E_s + 3E_a) \equiv \overline{E}$ no depende del espín del sistema y, como es fácil de convencerse, es el valor de la energía, promediado respecto a los posibles estados de espín (tres estados con $S = 1$ y uno con $S = 0$), mientras que el segundo estado depende del espín del sistema de electrones. La diferencia $E_a - E_s$ suele anotarse en forma de cierto parámetro A que lleva signo menos. En este caso al hamiltoniano de espín de dos electrones se le puede conferir la forma

$$\mathcal{H}_S = \overline{E} - A s_1 s_2. \tag{1.39}$$

*) El hamiltoniano es el análogo cuántico de la función de Hamilton. Esta es la energía expresada por medio de impulsos y coordenadas. Para el movimiento de una partícula libre la energía es igual a $\frac{1}{2}mv^2$, y la función de Hamilton $\frac{p^2}{2m}$ ($p = mv$ es el impulso, y v, la velocidad).

Semejante anotación permite relacionar la ventaja energética de los estados con $S = 0$ y $S = 1$ con el signo del parámetro A. Para $A < 0$ es «rentable» la disposición «antiparalela» de los espines, y para $A > 0$, la «paralela». El parámetro A se denomina *integral de intercambio*, y el segundo sumando en la fórmula (1.39) lleva el nombre de energía de intercambio o *interacción de intercambio*.

Dilucidemos el origen de los términos. El calificativo «de intercambio» debe su aparición al hecho de que las funciones de onda simétrica y antisimétrica describen el estado de los electrones que se cambian de sitio. Más aún, el parámetro A es la medida de la frecuencia con que se cambian los sitios. Dicho parámetro se denomina *integral* de intercambio ya que para calcularlo es necesario integrar determinadas expresiones que contienen funciones de onda. El término *interacción* de intercambio *) subraya que la estructura del hamiltoniano de espín es tal como si entre los dos electrones existiera cierta interacción específica de fuerza cuyo valor depende de la disposición mutua de los espines de los electrones. En este sentido aquélla recuerda la interacción magnética. De medida de intensidad sirve la integral de intercambio A.

Recalquemos varias circunstancias de gran importancia para el futuro.

1) La interacción de intercambio es isótropa. El giro de todos los espines a un mismo ángulo no hace variar el valor de la energía de intercambio. Eso se deduce, en particular, del hecho de que en la fórmula (1.39) entra el producto escalar de los espines que no varía al girar estos dos a un mismo ángulo.

2) La intensidad de la interacción de intercambio A depende del valor de la energía electrostática de los electrones y, debido a ello, no es pequeña, aunque, como regla, $|A|$ a pesar de todo es algo menor que la energía media de interacción electrostática (en nuestras designaciones $|A| < < E$).

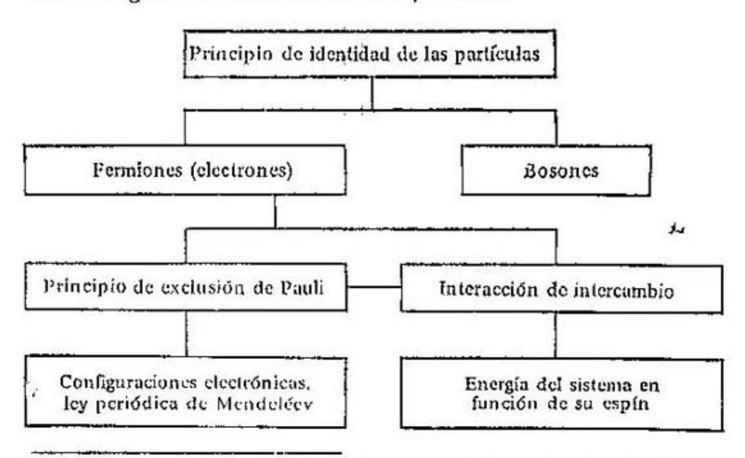
---

*) No podemos abstenernos de citar una observación de Bernard Shaw que guarda relación «directa» con la interacción de intercambio: «Si usted tiene una manzana y yo tengo una manzana, y si nosotros intercambiamos estas manzanas, tanto usted como yo nos quedamos con una manzana. Ahora bien, si usted tiene una idea, y yo tengo una idea, y nosotros intercambiamos estas ideas, entonces, cada uno de nosotros tendrá dos ideas.»

3) De acuerdo con lo expuesto anteriormente, el signo de la integral de intercambio puede ser tanto positivo como negativo. Cuando se trata de la interacción de intercambio intraatómica, las más de las veces $A > 0$ (lo que está fijado en una de las reglas de Hund); durante la interacción interatómica se encuentran con mayor frecuencia las situaciones cuando $A < 0$, aunque los casos cuando $A > 0$ no existen simplemente, sino que también sirven de explicación de la propiedad magnética más ostensible, el ferromagnetismo.

En el caso de la interacción de intercambio interatómica (cuando los electrones que interaccionan pertenecen a distintos átomos) la integral de intercambio A depende sustancialmente de la distancia entre los átomos, disminuyendo con brusquedad (de modo exponencial) al alejarse éstos unos de otros a distancias que superen las dimensiones del átomo. Por supuesto, esta tesis puede ser demostrada tan sólo introduciendo funciones de onda concretas en una integral de intercambio concreta, lo cual puede ser concebido con bastante facilidad recordando que la interacción de intercambio es el resultado del cambio de sitio de los electrones *).

Para concluir, exponemos un pequeño esquema que resume la lógica de los dos últimos párrafos:



*) Semejantes declaraciones no deben infundir la ilusión de comprensión. Quisiéramos despertar el interés del lector. Probablemente, el interés así despertado sirva de estímulo para estudiar más detalladamente el objeto, lo cual, en adelante, sí que conducirá a la comprensión.

Capítulo 2

PARAMAGNETISMO Y DIAMAGNETISMO

De los ladrillos más diminutos de la sustancia pasamos a los cuerpos macroscópicos y procuraremos contar sobre sus propiedades magnéticas. Ni siquiera en las monografías especiales se enumeran las propiedades de *todas* las sustancias. Es imposible hacerlo, pues su número es demasiado grande. Pero ya en los tiempos remotos se sabía que la ciencia comienza por la sistematización. Hay que tener presente que toda sistematización es convencional, requiere reservas, adiciones, explicaciones y excepciones. Al físico soviético Ya. G. Dorfman le gustaba citar un buen ejemplo de la falta de lógica de una sistematización cómoda: «Las tiendas de calzado se dividen en secciones de calzado para hombres, para mujeres y calzado de temporada».

Las propiedades magnéticas de la sustancia admiten una sistematización simple y lógica. Todas las sustancias son diamagnéticas, o bien, paramagnéticas. La frase: «todas las sustancias se dividen en paramagnéticos y diamagnéticos» llegará a ser irreprochable si añadimos: «a altas temperaturas».

De este modo:

todas las sustancias a altas temperaturas son diamagnéticas o paramagnéticas.

Lo único que queda es explicar qué es el paramagnetismo y qué es el diamagnetismo, así como relatar sobre las propiedades magnéticas a *bajas* temperaturas.

§ 1. SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA

Si entre los polos de un imán o dentro de un solenoide por el cual circula corriente se coloca una sustancia, las líneas de fuerza magnéticas se redistribuirán algo en comparación con aquella distribución suya cuando entre los polos del imán o dentro del solenoide no se interpone nada (fig. 17). Bajo la acción del campo magnético todos los cuerpos se imantan. Esto significa que cada elemento del volumen del cuerpo se comporta como un imán pequeño, y el momento magnético del cuerpo en su conjunto es la suma

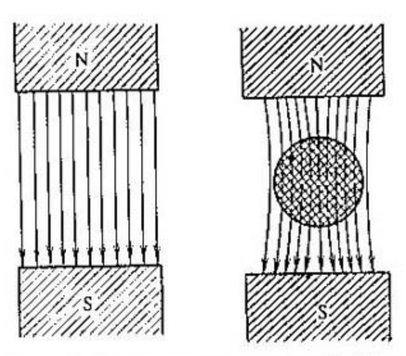


FIG. 17. *Las líneas de fuerzas magnéticas se redistribuyen si entre los polos del imán se introduce un cuerpo.*

vectorial de los momentos magnéticos de todos los elementos del volumen. La densidad $\mathcal{M}$ del momento magnético sirve de medida de magnetización del cuerpo. La dimensión de $\mathcal{M}$ se determina por el hecho de que $\mathcal{M}V$ (donde V es el volumen del cuerpo) es el momento magnético M. Es fácil cerciorarse de que la dimensión de la densidad $\mathcal{M}$ del momento magnético coincide con la dimensión del campo magnético *)

$$|\mathcal{M}| = |H| = g^{1/2}/\text{cm}^{1/2}\cdot\text{s}.$$

La magnetización $\mathcal{M}$ diferente de cero aparece solamente bajo la acción del campo magnético, con la particularidad de que en los campos no muy intensos ésta aumenta de modo lineal junto con el campo:

$$\mathcal{M} = \chi H. \qquad (2.1)$$

En todo caso así son las cosas a altas temperaturas.

El factor adimensional χ lleva el nombre de *susceptibilidad magnética.*

Los paramagnéticos son sustancias cuyo $\chi > 0$, en cambio, para los diamagnéticos $\chi < 0$. La tercera condición no existe: en la naturaleza no hay sustancias para los cuales $\chi = 0$ **). Por regla general, la susceptibilidad paramagné-

*) *Problema 10.* Determinen la dimensión de H y M.

**) El paramagnetismo y el diamagnetismo fueron descubiertos por Faraday.

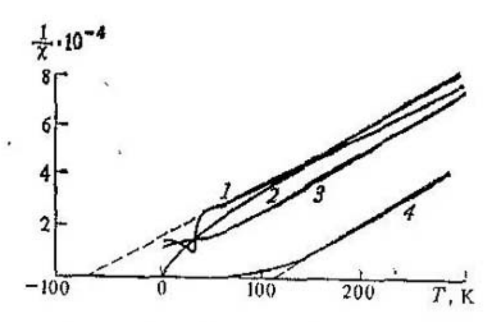


FIG. 18. *Variación de $1/\chi$ en función de T para los paramagnéticos: curva 1, $CuSO_4$; curva 2, $Nd_2(SO_4)_3\cdot 8H_2O$; curva 3, $Pr_2(SO_4)_3\cdot 8H_2O$; curva 4, Ni.*

tica χ_{para} es mucho mayor por su magnitud que la diamagnética χ_{dia}, es decir,

$$\chi_{para} \gg |\chi_{dia}|,$$

aunque existen excepciones muy importantes (véase más adelante el § 6). La susceptibilidad magnética de los diamagnéticos no depende, prácticamente, de la temperatura, mientras que la de los paramagnéticos depende en sumo grado.

Pierre Curie, en 1895, estableció que

la susceptibilidad paramagnética disminuye inversamente proporcional a la temperatura T *).

Esta relación se cumple bien a temperaturas lo suficientemente altas para todos los paramagnéticos. El enunciado que acabamos de mencionar suele denominarse ley de Curie **). Al bajar la temperatura se observa una desvia-

---

*) Utilizaremos la escala absoluta de temperaturas, o sea, la escala Kelvin. El cero de esta escala corresponde al estado fundamental del cuerpo cuando en éste faltan por completo los movimientos térmicos de las partículas. Aunque la temperatura es un concepto acostumbrado, no es fácil asimilar su verdadero sentido físico. Recomendamos al lector el libro de Ya. A. Smorodinski «Temperatura», publicado en español por la Editorial Mir.

**) La independencia respecto a la temperatura de la susceptibilidad diamagnética también fue descubierta por P. Curie. El mismo halló, además, que el aumento de la temperatura puede destruir el ferromagnetismo (véase más adelante).

ción sistemática respecto a esta ley, en particular, durante la investigación de paramagnéticos sólidos y líquidos. La susceptibilidad paramagnética en función de la temperatura es conveniente representarla en forma de variación de $1/\chi$ en función de T. En la fig. 18 se ve que para todas las sustancias representadas en esta figura los valores experimentales de $1/\chi$ dependen linealmente de la temperatura (para T grandes), sin embargo, para unas sustancias, durante la extrapolación, la recta experimental corta el eje de abscisas a la temperatura positiva Θ_p, mientras que para otras, a la temperatura negativa. El comportamiento de $\chi = \chi(T)$ puede describirse por medio de la fórmula que generaliza la ley de Curie,

$$\chi = \frac{C}{T-\Theta_p}; \quad C \text{ y } \Theta_p \text{ son constantes;}$$
$$T \gg |\Theta|_p, \tag{2.2}$$

y lleva el nombre de *ley de Curie — Weiss*. La magnitud Θ_p (incluso cuando $\Theta_p < 0$) se denomina *punto paramagnético de Curie*. Téngase presente que no se debe olvidar el calificativo «paramagnético», puesto que el concepto de «punto de Curie» por sí mismo tiene otro sentido, del cual hablaremos más tarde. El hecho de que Θ_p puede ser menor que cero no contradice, ni mucho menos, el hecho de que no pueden existir temperaturas absolutas negativas. Si $\Theta_p < 0$, esta circunstancia significa tan sólo que $\chi(T) < C/T$ para $T \gg |\Theta_p|$, mientras que para $\Theta_p > 0$ $\chi(T) > C/T$.

Las constantes C y Θ_p en la ley de Curie — Weiss son diferentes para distintas sustancias. Nuestra tarea consiste en establecer cómo las mismas están relacionadas con las características de los átomos y moléculas que constituyen las sustancias.

El comportamiento de los paramagnéticos a temperaturas próximas a la temperatura paramagnética de Curie $T \approx \approx |\Theta_p|$ reviste gran interés y lo analizaremos especialmente una vez que hayamos comprendido por qué para $T \gg |\Theta_p|$ tiene lugar la ley de Curie y por qué cuando $T \approx |\Theta_p|$ se observan desviaciones respecto a ésta.

Las propiedades magnéticas de la sustancia se describen a veces mediante la susceptibilidad magnética χ y a veces se recurre a la *permeabilidad magnética*

$$\varkappa = 1 + 4\pi\chi. \tag{2.3}$$

Está claro que

para los paramagnéticos $\varkappa > 1$,
para los diamagnéticos $\varkappa < 1$.

Conforme a las relaciones (2.1) y (2.3), la permeabilidad magnética es un coeficiente de proporcionalidad entre el vector $\boldsymbol{H}$ y el vector $\boldsymbol{B}$ introducido por la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}. \tag{2.4}$$

Entonces, efectivamente, $\boldsymbol{B} = \varkappa \boldsymbol{H}$ y $\chi = 1 + 4\pi\chi$.

Aunque el vector $\boldsymbol{B}$ lleva el nombre de vector de inducción magnética, y $\boldsymbol{H}$, el de campo magnético, el verdadero sentido de $\boldsymbol{B}$ consiste en que $\boldsymbol{B}$ (¡y no $\boldsymbol{H}$!) es el campo magnético medio en un medio. Cada átomo representa una fuente microscópica de campo magnético, y el campo en un medio varía de punto a punto a distancias interatómicas. Además, los átomos y los electrones en éstos se encuentran en constante movimiento. Por esta causa el campo microscópico (verdadero) varía todo el tiempo. El valor del campo que registran los instrumentos macroscópicos no es sino el resultado de promediar, tanto por el tiempo como por el espacio, el campo microscópico. Repetimos otra vez: $\boldsymbol{B}$ es el campo magnético medio.

Cuando el campo magnético atraviesa una zona ocupada por la sustancia, la ausencia de cargas magnéticas (véase el cap. 1, § 1) se manifiesta en el hecho de que las líneas de fuerza magnéticas no se interrumpen: la componente normal (a la superficie del cuerpo) del vector $\boldsymbol{B}$ es igual a la componente normal del vector $\boldsymbol{H}$ fuera del cuerpo (fig. 19). Mas a pesar de todo se suele llamar campo magnético no el vector $\boldsymbol{B}$, sino el $\boldsymbol{H}$. Esperamos que esta discordancia entre la denominación y el sentido no llevará a equivocaciones. Mientras

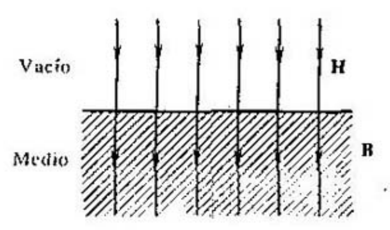


FIG. 19. *Las líneas de fuerza magnéticas no se interrumpen al atravesar la frontera entre el vacío y el medio.*

la permeabilidad magnética $\varkappa$ no se distinga demasiado de la unidad, la diferencia entre B y H, en general, no será muy esencial.

Concluimos este párrafo sinóptico que reviste, de sumo, el carácter de constatación, con la definición del diamagnético ideal para el cual $\chi = -1/4\pi$ y $\varkappa = 0$. La igualdad a cero de la permeabilidad magnética y, por tanto, también de la inducción B, significa que en un diamagnético ideal el campo magnético medio es igual a cero. Tal cuerpo, en caso de que exista, debe expulsar de su seno las líneas de fuerza magnéticas. Como nos cercioraremos más adelante (§ 6),

los superconductores son diamagnéticos ideales.

§ 2. EL CAMPO MAGNÉTICO ALÍNEA LOS MOMENTOS MAGNÉTICOS

Al comparar los diamagnéticos y los paramagnéticos, descubrimos con facilidad en qué se diferencian: los paramagnéticos constan de átomos o moléculas que poseen momentos magnéticos, y los diamagnéticos, de átomos o moléculas cuyos momentos magnéticos son iguales a cero. Ahora demostraremos que nuestra observación ha fijado una circunstancia esencial: *los cuerpos constituidos por átomos (moléculas) que tienen momento magnético deben ser paramagnéticos, y los constituidos por átomos (moléculas) con momento nulo, deben ser diamagnéticos.*

En el primer capítulo nos hemos detenido detalladamente en los momentos magnéticos de átomos aislados, convenciéndonos de que los átomos con momento magnético diferente de cero constituyen una mayoría considerable en comparación con los átomos con momento nulo. Pero la mayoría de los cuerpos no constan de átomos, sino de moléculas. La asociación de átomos en moléculas se describe detalladamente en la mecánica cuántica, que permite calcular (en todo caso, de principio) las fuerzas que actúan entre las partículas submoleculares, esclareciendo la estructura electrónica de las moléculas que se forman. Como no tenemos la posibilidad de someter a un análisis pormenorizado estas cuestiones, señalaremos tan sólo que, con frecuencia, al combinarse en una molécula dos o varios átomos con momentos magnéticos (denominemos estos átomos paramagnéticos), la molécula resulta privada de momento magnético, o sea,

resulta diamagnética *). Además del caso analizado en el § 10 del primer capítulo referente a la molécula de H_2 (de dos átomos paramagnéticos se forma una molécula diamagnética), examinemos también la molécula de la sal común NaCl. Las configuraciones electrónicas y los términos de los átomos de Na y Cl son como sigue:

$$\text{Na: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s; \quad {}^2S_{1/2};$$

$$\text{Cl: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5; \quad {}^2P_{3/2}.$$

Tanto el átomo de sodio como el de cloro son átomos paramagnéticos. Esto lo evidencian claramente sus términos.

La formación de la molécula de NaCl va acompañada de la creación del ion Na^+ cuya envoltura electrónica es análoga a la del átomo del gas inerte Ne, y del ion Cl^- cuya envoltura electrónica es análoga a la del Ar. Debido a esta circunstancia, ambos iones no tienen momentos magnéticos. A costa de la atracción electrostática (coulombiana) éstos forman una molécula diamagnética. Quisiéramos subrayar que el número de diamagnéticos es mayor que lo que se puede suponer al echar una ojeada a las configuraciones electrónicas de distintos átomos. Por el contrario, las moléculas paramagnéticas se encuentran raras veces. El ejemplo más conocido es el oxígeno: la molécula de O_2 es paramagnética.

En el gas, las moléculas se hallan en constante movimiento, chocan entre sí y contra las paredes, con la particularidad de que la longitud de su recorrido libre supera considerablemente las dimensiones de las mismas. La elevación de la temperatura significa el aumento de la velocidad media del movimiento caótico de las moléculas. En un sólido (un cristal) las moléculas están dispuestas según un orden estrictamente determinado, y el movimiento térmico se manifiesta en el aumento de la amplitud de sus oscilaciones alrededor de las posiciones de equilibrio. El líquido representa una forma intermedia. Las moléculas oscilan en torno a posiciones eventuales de equilibrio que no son fijas, pero que se trasladan asegurando la fluidez del líquido. La elevación de la temperatura del líquido significa el aumento de la intensidad del movimiento caótico de las moléculas.

En esta breve descripción de los estados de agregación no nos interesaba el hecho de si las moléculas poseen momentos magnéticos o no. Este proceder no se debe exclusivamente

---

*) Recordemos que se trata solamente del momento magnético electrónico.

a nuestro deseo de simplificar el cuadro tan complejo de por sí, sino también a que, mientras no nos interesen las propiedades magnéticas de la sustancia, la presencia o la ausencia del momento magnético en la molécula no es de esencial importancia. Las propiedades del oxígeno líquido (las moléculas son paramagnéticas) no se diferencian cualitativamente de las del nitrógeno líquido (las moléculas son diamagnéticas). Para nosotros es importante otra cosa. Cuando estudiamos las propiedades magnéticas macroscópicas de los paramagnéticos podemos, al principio, preterir la disposición y el movimiento térmico de los centros de gravedad de las moléculas prestando atención tan sólo a la posición en el espacio de los momentos magnéticos de éstas. Para dilucidar las propiedades magnéticas de las sustancias, las moléculas paramagnéticas pueden representarse en forma de flechitas microscópicas, o sea, de pequeños imanes capaces de orientarse en el espacio por medio de $2J + 1$ métodos.

El conjunto de partículas cuyo comportamiento depende solamente de la dirección de sus momentos magnéticos lleva el nombre de *gas de agujas magnéticas*.

El gas de agujas magnéticas es un modelo adecuado para describir las propiedades de los paramagnéticos a altas temperaturas. La palabra «gas» destaca, únicamente, la circunstancia de que no se toma en consideración la interacción de los momentos magnéticos.

Para seguir adelante tendremos que aprovechar algunos resultados de la *física estadística* *). Reflexionemos qué es el movimiento térmico para el gas de agujas magnéticas colocadas en el campo magnético H. La física estadística afirma:

> *el número de partículas $N(m_J)$ con una proyección determinada del momento magnético **M** en el campo magnético **H** es proporcional al* $\exp(-\varepsilon_M/kT)$,

donde, de acuerdo con (1.28) y (1.33), $\varepsilon_M = -MH = -g\mu H m_J$ es la energía del momento magnético M en el campo magnético H, y k, la constante de Boltzmann igual a $1{,}4 \cdot 10^{-16}$ ergios/grado. El coeficiente de proporcionalidad se elige con arreglo al requerimiento natural: la suma de números de partículas (en unidad de volumen) con proyeccio-

---

*) *La física estadística* es una parte especial de la física que estudia las leyes generales a que están sujetos el comportamiento y las propiedades de los cuerpos macroscópicos, es decir, de los cuerpos que constan de un número colosal de partículas aisladas: átomos, moléculas, electrones, iones, etc.

nes diferentes del momento magnético debe coincidir con el número total de partículas N (en unidad de volumen):

$$\sum_{m_J=-J}^{J} N(m_J) = N.$$

De este modo,

$$\frac{N(m_J)}{N} = \frac{e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum\limits_{m_J=-J}^{J} e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}, \tag{2.5}$$

donde J es el momento total del átomo o molécula (recordemos al lector que el valor del factor g se determina por los valores de L, S y J (véase la fórmula (1.34)).

De esta fórmula se infiere que para el gas de agujas magnéticas las palabras «movimiento térmico» significan una distribución determinada (dependiente de la temperatura) de las partículas en los niveles magnéticos. Por lo visto, semejante «definición» del movimiento térmico provocará asombro. Pero no se puede hacer nada: el sentido de temperatura (por supuesto, en un caso dado) lo encierra precisamente la fórmula (2.5).

A cero absoluto de temperatura (para $T \to 0$) todas las partículas se «agrupan» en el nivel magnético con $m_J = J$:

$$N_{m_{J=J}} = N; \quad N_{m_{J \neq J}} = 0,$$

o sea los momentos magnéticos de todas las partículas son «paralelos» al campo magnético. Se sobreentiende que son paralelos en la medida en que lo permite la mecánica cuántica. Por eso hemos conservado las comillas (véase la pág. 49).

Cuando la temperatura tiende formalmente al infinito (más tarde hablaremos de lo que son temperaturas grandes y pequeñas), la magnitud $N(m_J)$ deja de depender de m_J:

$$\frac{N(m_J)}{N} = \frac{1}{2J+1},$$

es decir, las partículas están distribuidas uniformemente por todos los niveles y en cada nivel se encuentra la $(2J+1)$-ésima parte del total de las partículas.

Intuitivamente resulta claro que la temperatura determina la energía del gas (¿o viene determinada por la energía del gas!). En efecto, supongamos que sabemos crear el gas de agujas magnéticas con una energía determinada, o sea, prefijar la energía total de dicho gas. Designémosla con $\mathscr{E}$. Entonces, de acuerdo con la fórmula (2.5) *)

$$\mathscr{E} = -N\mu g H \frac{\sum_{m_J=-J}^{J} m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^{J} e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}},$$

y para cada valor de la temperatura puede calcularse la energía del gas. Examinemos detalladamente el caso más simple: $J = 1/2$, $g = 2$. La expresión de la energía en función de la temperatura tendrá la forma

$$\mathscr{E} = -N\mu H \operatorname{th} \frac{\mu H}{kT}. \qquad (2.6)$$

Si T tiende (¡formalmente!) al infinito, la energía $\mathscr{E}$ tiende a cero: $\mathscr{E}_\infty = 0$. El cero se obtiene debido a nuestra elección del punto de referencia para los niveles magnéticos. La energía del nivel interior constituye $-\mu H$, y la del superior, $+\mu H$. Para todas las temperaturas finitas la energía es negativa por cuanto en el nivel inferior se encuentran más partículas que en el superior.

Hagamos ahora una pregunta «indecente». ¿Qué será si la energía del gas de dos niveles se hace mayor que $\mathscr{E}_\infty$? Para conseguirlo es necesario «organizar» una distribución de las partículas tal que su cantidad en el nivel superior sea mayor que en el inferior (esta distribución se denomina *inversa*). ¿Qué temperatura corresponderá a tales estados? La respuesta es absolutamente inesperada: «¡Negativa!». En la fig. 20 se ve que la temperatura negativa está «situada» tras la positiva infinitamente grande, a ésta le corresponde una energía mayor.

*) La fórmula para $\mathscr{E}$ se ha obtenido basándose en las siguientes consideraciones: la energía del gas es la suma de energías de las partículas que se encuentran en todos los niveles; la energía de las partículas en un nivel dado (con un m_J dado) es la energía del nivel multiplicada por el número de partículas en un nivel dado,

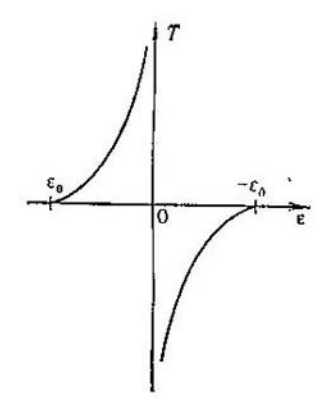


FIG. 20. *Variación de la temperatura en función de la energía total de sistema de imanes pequeños* ($J = 1/2$) *en el campo magnético* H; $\varepsilon_0 = N\mu H < 0$.

Recalquemos que la posibilidad de introducción de la temperatura negativa está relacionada con el número finito de niveles del sistema (en un caso dado, en el gas de agujas magnéticas). La temperatura real siempre es positiva. La temperatura negativa es un procedimiento cómodo para describir el estado de desequilibrio de los sistemas con un número finito de niveles, que se aplica en la física y en la técnica de los láseres.

* * *

Tomamos demasiada libertad en nuestro tratamiento de la temperatura, haciéndola tender a cero y al infinito. Nuestra inquietud con este motivo la delata el hecho de subrayar el carácter formal de dicho procedimiento. En física no hay magnitudes abstractamente grandes y pequeñas (ya tuvimos la posibilidad de convencernos de ello). La magnitud del parámetro que nos interesa debe compararse, obligatoriamente, con algo. ¿Con qué magnitud ha de compararse la temperatura T? En todas las fórmulas de este párrafo la temperatura entra en la relación $\mu H/kT$ (omitimos el factor g ya que es del orden de la unidad). La temperatura debe considerarse pequeña o grande según sea $\mu H/kT \gg 1$ ó $\mu H/kT \ll 1$. Hallemos la relación (en las unidades adoptadas) entre T y H para $\mu H = kT$:

$$T\text{K} = 0.5 \cdot 10^{-4}\, H \text{ Oe}. \tag{2.7}$$

Es una relación tan importante que conviene detenernos en ella. En campos ordinarios y a temperaturas ambientes

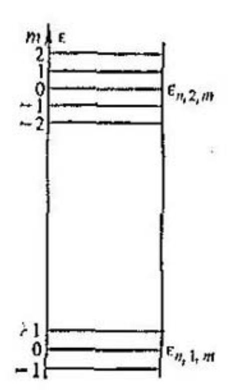


FIG. 21. *Los niveles magnéticos con n y l diferentes están alejados unos de otros a una «distancia» grande.*

ordinarias ($\approx$300 K) $kT > \mu H$. Tan sólo a temperaturas muy bajas (en las proximidades del cero absoluto) se logra transformar la desigualdad en inversa (¡para el campo magnético $H = 10^4$ Oe la igualdad se consigue a $T = 0{,}5$ K!).

El sentido físico de la magnitud μH queda claro de la fórmula (1.29); μH es la distancia entre los niveles magnéticos. Pero resultó que, de ordinario, esta distancia es pequeña en comparación con kT, o sea, con la temperatura expresada en unidades energéticas. Los demás niveles (no magnéticos) de los átomos o moléculas están separados del nivel fundamental, el más bajo, a una distancia del orden de varios electronvoltios, y 1 eV $\approx 10^4$ K (fig. 21). En condiciones habituales estos niveles no se excitan *), lo que nos da el derecho de olvidar su existencia considerando el átomo (molécula) como una aguja magnética, y utilizar el modelo del gas de agujas magnéticas para el cálculo de las propiedades magnéticas.

Ahora pasamos a la tesis principal de este párrafo. Demostraremos que el gas de agujas magnéticas es paramagnético. Con este fin, valiéndonos de la distribución (2.5), calculamos el momento magnético de su unidad de volumen $\mathcal{M}$

---

*) El número de átomos en estado de excitación es proporcional a $e^{-\Delta\varepsilon_n/kT}$, donde $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_0$; ε_n es la energía del estado de excitación, y ε_0, la del estado fundamental (a temperatura ambiente, es decir, para $T = 300$ K, si $\Delta\varepsilon_n \approx 1$ eV $= 10^4$ K, entonces $e^{-\Delta\varepsilon_n/kT} \approx 10^{-30}$!).

6—1598

(más exactamente, la proyección de $\mathcal{M}$ sobre el campo magnético H) *):

$$\mathcal{M} = N\mu g \frac{\sum_{m_J=-J}^{J} m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^{J} e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}. \tag{2.8}$$

Ahora aprovechemos el hecho de que $\mu g H \ll kT$. En el denominador de la (2.8) los exponentes pueden sustituirse por unidades, y en el numerador hay que dejar los primeros términos (lineales respecto a H) del desarrollo del exponente:

$$\mathcal{M} = \frac{N(\mu g)^2}{kT} \frac{H}{2J+1} \sum_{m_J=-J}^{J} m_J^2.$$

Pero $\sum_{m_J=-J}^{J} m_J^2 = \frac{1}{3} J(J+1)(2J+1)$ (la deducción de esta fórmula es un ejercicio algebraico útil). Por lo tanto

$$\mathcal{M} = \frac{N(\mu g)^2}{3kT} J(J+1) H,$$

y la susceptibilidad magnética

$$\chi = \frac{N(\mu g)^2}{kT} \frac{J(J+1)}{3} \tag{2.9}$$

es positiva y obedece la ley de Curie, es decir, efectivamente:

el gas de agujas magnéticas es paramagnético.

No sólo hemos demostrado esta tesis, sino también hemos logrado, «de paso» calcular la constante en la ley de Curie. Como se advierte de la fórmula (2.7), al cambiar el coeficiente de proporcionalidad entre $1/T$ y χ podemos determinar el valor del momento magnético de las moléculas del gas o, mejor dicho, la magnitud $(\mu g)^2/J(J+1)$.

Como sabemos, al descender la temperatura llegan a ser notables las desviaciones respecto a ley de Curie (sobre todo, en los paramagnéticos sólidos y líquidos). Este hecho es natural ya que al deducir la fórmula (2.9) no teníamos en

*) Véase la nota de la pág. 79.

cuenta la interacción de los momentos atómicos: la magnético-dipolar y (¡primordialmente!) la de intercambio. A temperaturas altas esto es absolutamente lícito *), de modo que la tarea de este párrafo se ve cumplida. Más tarde relataremos a qué conduce la interacción.

RESONANCIA PARAMAGNÉTICA ELECTRÓNICA

Ya hemos conocido bastante acerca de los imanes atómicos y de la distribución de las partículas magnéticas por los niveles de energía para relatar sobre un fenómeno interesante e importante que lleva el nombre de *resonancia paramagnética electrónica* **).

Cuando examinamos el momento magnético aislado en un campo magnético permanente y homogéneo (cap. 1, § 6), establecimos que aquél, desviado del campo, realizaría precesiones con una frecuencia γH, donde γ es la relación giromagnética. La precesión realizada con frecuencia constante, mirándola «de lado», se asemeja a una oscilación armónica. Pero es sabido que si sobre un cuerpo oscilante se actúa con una fuerza variable de la misma frecuencia, surgirá resonancia, es decir, el cuerpo oscilante le quitará la energía a la fuente que la produce.

¿Es posible crear una fuerza periódica que actúe sobre el momento magnético? Sí, es posible. Resulta que con este fin es necesario girar el campo magnético, es decir, proceder de tal forma que ese campo actuante sobre el momento magnético, además de la componente continua, tenga una componente alterna dirigida perpendicularmente a la continua

*) Cuando se trata de partículas de un gas clásico ordinario, está justificado el hecho de que prescindimos de su interacción a altas temperaturas, por cuanto $3/2kT$ es la energía cinética media de la molécula, y si la misma es grande en comparación con la energía media de interacción (calculada, naturalmente, respecto a una partícula), la última, por supuesto, puede despreciarse. En el gas de agujas magnéticas la temperatura determina tan sólo la población de los niveles magnéticos. ¿Qué relación guarda esto con la interacción de las partículas? Sin embargo, como podremos ver (véase el cap. 3), a altas temperaturas, en efecto, es completamente lícito despreciar la interacción, es decir, el modelo del gas es válido.

**) La resonancia paramagnética electrónica fue descubierta por E. K. Zavoiski en 1944, durante los experimentos con las sales del grupo de hierro. Las consideraciones referentes a la posibilidad de existencia de la resonancia paramagnética electrónica se exponían a partir del año 1922.

y que gira alrededor de esta última con una frecuencia ω *).
Si $\omega = \gamma H$ surge una resonancia paramagnética electrónica que se manifiesta en el crecimiento brusco de las pérdidas de energía magnética del campo magnético alterno. Ésta es la explicación de la resonancia paramagnética electrónica en el lenguaje «clásico».

La explicación cuántica es incluso más sencilla. Supongamos que operamos con el gas más cuántico, el de espines electrónicos. Entonces, $g = 2$ y μ, como siempre, es el magnetón de Bohr. Por impacto de la onda electromagnética las partículas pueden pasar del nivel inferior al superior si la energía del cuanto electromagnético, o sea, del fotón, es igual a la diferencia de energías entre los niveles, es decir, para $\hbar\omega = 2\mu H$. Cabe hacer una observación: como la relación giromagnética de espín es igual a $\gamma = e/m_e c$, las condiciones clásica y cuántica de la resonancia paramagnética electrónica coinciden.

Las ondas electromagnéticas pueden interactuar no sólo con los momentos magnéticos electrónicos, sino también con los nucleares. La energía de las partículas nucleares en el campo magnético depende de la magnitud de la proyección de su momento magnético sobre el campo magnético. Al igual que en el caso de los momentos magnéticos electrónicos surge un sistema de niveles equidistantes entre los cuales, por acción de la radiación electromagnética, pueden tener lugar transiciones. Este fenómeno lleva el nombre de resonancia magnética nuclear **). Cualitativamente, la resonancia paramagnética electrónica y la resonancia magnética electrónica son muy parecidas, pero, desde el punto de vista cuantitativo éstas se distinguen considerablemente, lo cual se debe a la diferencia entre los momentos magnéticos electrónicos y nucleares ***).

---

*) Una frase larga puede crear la impresión de una realización difícil. Habitualmente, la muestra se coloca en un resonador en el que se excita el campo electromagnético periódico de alta frecuencia, y el propio resonador (con la muestra) se dispone entre los polos del imán o dentro del solenoide.

**) La resonancia magnética nuclear fue descubierta y explicada por F. Bloch y E. Purcell en 1946 (Premio Nobel de física en 1952).

***) *Problema 11.* Representen la condición de la resonancia paramagnética electrónica y la de la resonancia magnética nuclear en forma de longitud de onda electromagnética en función del campo magnético. Hallen el valor numérico del coeficiente de proporcionalidad para el electrón y el protón (véase la tabla 1 en la pág. 47).

La resonancia paramagnética electrónica y la resonancia magnética nuclear se convirtieron en métodos importantes de investigación y se emplean no sólo en física; con su ayuda se ha creado toda una serie de instrumentos en química, geología, biología, en fin, por doquier donde es necesario hacer una «introspección» del cuerpo sin destruirlo.

§ 3. EL DIAMAGNETISMO

De una forma muy breve la naturaleza del paramagnetismo puede explicarse así: el campo magnético *orienta* los momentos magnéticos de los átomos o moléculas.

El diamagnetismo surge debido a que el campo magnético *engendra* en cualquier átomo y en cualquier molécula un momento magnético proporcional al campo magnético. El momento magnético surge a causa de que sobre los electrones en movimiento actúa la fuerza de Lorentz igual a

$$F=\frac{e}{c}[vH]. \tag{2.10}$$

Obtener de una forma estricta, el valor de la susceptibilidad diamagnética sólo se puede valiéndose del aparato de la mecánica cuántica. Sin embargo, también es posible proceder de una manera inconsecuente: recurriendo a la mecánica clásica, mostrar por qué surge el efecto diamagnético, evaluar la magnitud de la susceptibilidad diamagnética, citar la fórmula exacta y sólo después indicar en qué punto la deducción no es rigurosa. Procederemos precisamente de este modo. Eso nos enseñará a aprovechar los resultados de la mecánica cuántica operando con los términos clásicos.

Como veremos, la susceptibilidad diamagnética es sumamente pequeña. Si el átomo *posee* un momento magnético, su variación debida al diamagnetismo es tan ínfima que, simplemente, puede despreciarse. Por esta razón es interesante estudiar el diamagnetismo en los átomos (o moléculas) que no poseen su momento magnético propio (paramagnético).

Tenemos que comenzar por la creación del «modelo clásico» del átomo diamagnético. Evidentemente, el modelo clásico más simple del átomo carente de momento magnético es como sigue *): dos electrones que giran alrededor del nú-

*) Recordemos que un electrón «cuántico» puede girar y tener el momento magnético igual a cero si se encuentra en el estado *s* (véase la pág. 37).

cleo en direcciones opuestas describiendo una misma órbita (en sentido horario y antihorario). Por supuesto, cada electrón tiene momento de la cantidad de movimiento (y, por lo tanto, también momento magnético), pero la suma de ambos momentos es igual a cero.

Coloquemos ahora nuestro «átomo» en el campo magnético H de tal modo que las órbitas de los electrones resulten en el plano perpendicular al campo magnético. Una restricción más y pasaremos al cálculo: el campo magnético es tan pequeño que la fuerza de Lorentz (2.10) puede considerarse como una perturbación insignificante en comparación con la fuerza que actúa sobre los electrones por parte del núcleo. Supongamos que v_0 es la velocidad del electrón que se mueve describiendo una circunferencia de radio R cuando el campo magnético H es igual a cero, y v es su velocidad cuando $H \neq 0$. Entonces, igualando la fuerza centrípeta a la proyección radial de la fuerza que actúa sobre el electrón, se puede determinar la variación de la velocidad de la partícula Δv condicionada por el campo magnético.

Para $H = 0$

$$\frac{m_e v_0^2}{R} = F_R,$$

y para $H \neq 0$

$$\frac{m_e v^2}{R} = F_R - \frac{eH}{c} v.$$

Al sustraer una ecuación de la otra y limitarse a un término lineal respecto a H, tenemos

$$\Delta v = -\frac{eH}{2m_e c} R. \qquad (2.11)$$

Prestemos atención a que el signo Δv no depende de la dirección del giro para $H = 0$. La rotación de uno de los electrones en nuestro átomo bielectrónico es un poco más rápida, y del otro, un poco más lenta. La magnitud $\Delta v/R = -eH/2m_e c$ tiene dimensión de frecuencia. Ésta se denomina frecuencia de Larmor ω_L (en honor al físico inglés J. Larmor). Vemos que por influjo de la fuerza de Lorentz (2.10) el electrón realiza movimiento rotatorio alrededor del campo magnético. Esta rotación se superpone al movimiento del electrón para $H = 0$.

Hemos examinado aquí un caso sumamente particular, cuando el campo magnético es perpendicular al plano de la órbita. Se puede demostrar un teorema más general (el teorema de Larmor):

> *supongamos que se conoce el movimiento de los electrones en ausencia del campo magnético; el movimiento en un campo magnético débil H será el mismo que el movimiento sin campo con rotación adicional alrededor de H y con una velocidad angular igual a la frecuencia ω_L.*

La rotación alrededor de H se denomina a menudo precesión de Larmor (fig. 22).

A propósito, ya nos hemos encontrado con la precesión de Larmor en el § 6 del cap. 1, cuando analizábamos la rotación del momento magnético en el campo magnético. En esencia, éste fue un ejemplo sobre la aplicación del teorema de Larmor: el movimiento del electrón (para $H = 0$) engendra un momento magnético el cual, bajo la acción del campo magnético, realiza precesiones (naturalmente, con la frecuencia de Larmor).

Retornemos a nuestro átomo «clásico». Cuando $H \neq 0$, ambos electrones adquieren un momento adicional de la cantidad de movimiento igual a $m_e \Delta vR$ y dirigido según el campo magnético. De este modo, el átomo adquiere el momento de la cantidad de movimiento distinto a cero e igual a la suma de los momentos de los electrones. Por cuanto existe el momento de la cantidad de movimiento, esto significa que el átomo posee también el momento magnético M_a. Puesto que el momento de la cantidad de movimiento está orientado según el campo, y la relación giromagnética es negativa

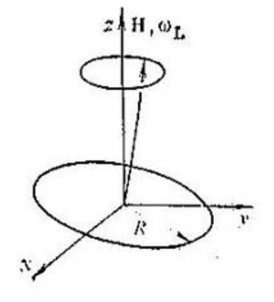


FIG. 22. *La normal al plano de la trayectoria realiza precesiones alrededor del campo H con frecuencia de Larmor ω_L; R es el radio de la trayectoria.*

(véase 1/10), $|e < 0|$), resulta que el momento magnético está dirigido *en contra* del campo *):

$$M_a = 2\cdot\frac{e}{2m_e c}\, m_e \Delta v R = -2\,\frac{e^2R^2}{4m_e c^2}\, H.$$

Demos a esta expresión la forma que nos permita librarse del modelo «clásico». Un electrón «cuántico» auténtico se mueve describiendo una esfera de radio r, y no una circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$. Como quiera que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y teniendo en cuenta que todas las direcciones en un átomo esférico son equivalentes, resulta que $R^2 = \frac{2}{3}r^2$. Concedamos a r el subíndice i que indica el número del electrón en el átomo y escribamos la expresión mecano-cuántica correcta para el momento diamagnético de cualquier átomo que contiene Z electrones (en el átomo que hemos examinado $Z = 2$):

$$M_a = -\frac{e^2H}{6m_e c^2}\sum_{i=1}^{Z} r_i^2. \qquad (2.12)$$

Si la unidad de volumen del cuerpo contiene N átomos, la susceptibilidad diamagnética es igual a

$$\chi_{\text{dia}} = -\frac{e^2N}{6m_e c^2}\sum_{i=1}^{Z} r_i^2. \qquad (2.13)$$

Hablando en rigor, esta expresión es válida si entendemos por r_i^2 la *media mecano-cuántica*. La verdadera comprensión de la significación de estas palabras puede conseguirse sólo después de entender el aparato matemático de la mecánica cuántica (véase la pág. 33). Para las evaluaciones, en vez de r_i^2 puede sustituirse la magnitud a^2, donde a es el tamaño del átomo.

¿Dónde, en nuestra deducción, nos hemos valido de una «maña»?

La deducción se asienta en la existencia de órbitas atómicas estables (el radio R lo consideramos invariable), hecho que sólo puede justificarse por la mecánica cuántica

*) Para las cargas positivas tanto el momento de la cantidad de movimiento como el momento magnético, debidos a la acción del campo H, están orientados en contra de ese campo.

conforme a la cual hay niveles estables discretos de energía de los electrones atómicos*).

Todas las sustancias se componen de átomos y moléculas en cuyo seno se mueven los electrones. Evidentemente, el diamagnetismo es una propiedad general. Por supuesto, ésta también existe en el caso de que los átomos (las moléculas) posean momentos magnéticos (ya lo hemos mencionado). En el caso general la susceptibilidad magnética χ tiene la forma

$$\chi = \chi_{para} + \chi_{dia}.$$

El segundo sumando es negativo, y el hecho de que la sustancia sea paramagnética o diamagnética depende de la relación entre las susceptibilidades diamagnética y paramagnética. Como vamos a cerciorarnos ahora, $|\chi_{dia}| \ll |\chi_{para}|$, es decir, si la sustancia consta de átomos poseedores de momentos magnéticos, esta sustancia es un paramagnético.

Efectivamente,

$$\frac{\chi_{dia}}{\chi_{para}} = \frac{kTm_e a^2}{\hbar^2}, \tag{2.14}$$

pero $\hbar^2/m_e a^2$ por el orden de magnitud es la energía del electrón en el átomo ε_a (véase § 4, cap. 1); ésta es igual, aproximadamente, a uno o varios electronvoltios, y 1 eV $\approx$ $\approx 10^4$ K. Está claro que en condiciones ordinarias $kT \ll$ $\ll \hbar^2/m_e a^2$ y, por lo tanto, $|\chi_{dia}| \ll \chi_{para}$.

La insignificancia del momento diamagnético en comparación con el paramagnético se revela con especial nitidez del siguiente razonamiento: para magnetizar el gas de agujas magnéticas es necesario un campo magnético que supere el valor de kT/μ (lo evaluamos en la pág. 80), y para crear en el átomo un momento magnético del orden de $\mu = e\hbar/m_e c$ se necesita un campo magnético exorbitante del orden de $\varepsilon_a/\mu \approx 10^9$ Oe. En un campo de este tipo la energía magnética es del orden de la coulombiana, lo cual, por supuesto, debe conducir a la reestructuración total del átomo **) (en particular, dejan de ser válidas las fórmulas (2.12) y (2.13)).

---

*) Para «justificarnos» aleguemos la siguiente circunstancia: la fórmula (2.13) fue deducida en 1905 por P. Langevin, quien partía de las premisas clásicas.

**) *Problema 12.* Demostrar, valiéndose de la fórmula (2.12), que el momento magnético de un átomo diamagnético $\sim\mu$, si $eH \approx$ $\approx e^2/a^2$.

En las condiciones terrestres no se logra crear un campo magnético $H \approx 10^8$ Oe, pero en el cosmos, evidentemente, los campos de semejante escala y hasta mayores no son nada raros.

A diferencia de la susceptibilidad paramagnética, la diamagnética no depende de la temperatura. Eso está relacionado con la cuestión (ya sometida a discusión) de los grandes «huelgos» energéticos entre el estado fundamental del átomo y sus estados de excitación (la aportación al valor medio la proporciona tan sólo el estado fundamental, mientras que la aportación de los estados de excitación es exponencialmente pequeña; véase la nota de la pág. 81).

La susceptibilidad diamagnética es tan pequeña en comparación con la paramagnética que una impureza, incluso insignificante, de átomos paramagnéticos introducida en el cuerpo diamagnético lo convierte en paramagnético.

Cabe señalar una cosa más: hasta ahora hablamos tan sólo del magnetismo electrónico (aunque es cierto que en la pág. 47 citamos los valores de los momentos magnéticos del protón y del neutrón). Lo único que nos justifica es la insignificancia de los momentos magnéticos nucleares (el momento magnético del protón es 700 veces menor que el magnetón de Bohr, o sea, el momento magnético propio del electrón). Por el contrario, si el cuerpo que se investiga es diamagnético y los núcleos de los átomos que lo constituyen poseen momentos magnéticos, entonces puede manifestarse el paramagnetismo nuclear. Por analogía con la susceptibilidad paramagnética electrónica (véase la fórmula (2.9)) es fácil escribir el valor de la susceptibilidad paramagnética nuclear:

$$\chi_{\text{nucl}} = \frac{N_{\text{nucl}}\mu^2_{\text{nucl}}}{kT} \frac{I(I+1)}{3}.$$

Aquí N_{nucl} es el número de núcleos paramagnéticos en la unidad de volumen; μ_{nucl}, el momento magnético del núcleo, e I, su espín. Incluso en el caso de que $\chi_{\text{nucl}} \ll |\chi_{\text{dia}}|$, el paramagnetismo nuclear puede descubrirse por el curso de temperatura de la susceptibilidad magnética. Precisamente de esta forma, al medir la susceptibilidad magnética del hidrógeno cristalino a temperaturas próximas al cero absoluto, B. G. Lázarev y L. V. Shúbnikov en 1936 descubrieron el paramagnetismo nuclear y determinaron el momento magnético del protón.

Hemos subrayado reiteradamente la necesidad de aplicar la mecánica cuántica en la investigación de las propiedades magnéticas. Hoy día cualquier curso de física de fenómenos magnéticos se basa totalmente en la mecánica cuántica. Ahora bien, al ver un enorme imán eléctrico que atrae un automóvil (muy a menudo, semejantes dibujos ilustran los manuales y libros de divulgación científica dedicados al magnetismo), es difícil concebir que el magnetismo es un fenómeno cuántico. Desde luego, toda división de los fenómenos macroscópicos en cuánticos y clásicos es sumamente convencional, aunque nos damos cuenta, intuitivamente, qué fenómenos deben incluirse entre los clásicos. Por ejemplo, las propiedades de los gases se describen bien por la física estadística clásica. Las características de los átomos o moléculas que integran los gases sirven de «condiciones del problema», se toman como dados, y los cálculos se llevan a cabo en conformidad con las leyes de la física clásica. Cuando se trata de un gas paramagnético se puede considerar que los átomos poseen momentos magnéticos microscópicos M_a, despreciar la cuantificación espacial y, utilizando las fórmulas de la física estadística clásica, calcular el momento magnético de la unidad de volumen. Para el valor clásico de la susceptibilidad paramagnética obtendremos *)

$$\chi_{cl} = \frac{NM_a^2}{3kT}. \qquad (2.15)$$

Lo único que se debe recordar es que el momento magnético atómico es de origen cuántico. En particular, este hecho se manifiesta en que la magnitud $M_a \approx e\hbar/m_e c$ es proporcional a la constante de Planck $\hbar$. La transición formal a la física clásica se realiza si $\hbar$ tiende a cero **). En este caso

---

*) *Problema 13.* Deduzcan la fórmula

$$\mathcal{M} = NM_a L\left(\frac{M_a H}{kT}\right); \quad L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}, \qquad (2.15')$$

valiéndose de la circunstancia de que el número de partículas (cuyo momento magnético forma un ángulo θ con el campo magnético H) es proporcional a $\exp(M_a H \cos\theta/kT)$ (véase la pág. 82).

De (2.15') obtengan la expresión para χ_{cl} (la fórmula (2.15'), al igual que la (2.13), la dedujo Langevin).

**) El momento diamagnético también tiende a cero cuando $\hbar \to 0$, por cuanto junto con $\hbar$ también se reducen a cero las dimensiones del átomo ($a \approx \hbar^2/m_e e^2$).

también tiende a cero tanto el momento paramagnético como la susceptibilidad magnética χ_{cl}.

La utilización estricta y consecuente de las fórmulas de la física estadística clásica permite establecer: cualquiera que sea la acción recíproca de las partículas, en estado de equilibrio térmico su momento magnético total es igual a cero, incluso en el caso de que las partículas estén cargadas y se encuentren en el campo magnético exterior *). La causa de este hecho asombroso radica en que la fuerza de Lorentz (2.10) no produce trabajo **), no cambia la energía de las partículas y las propiedades de equilibrio de éstas se determinan por su distribución según las energías.

El resultado general de la física estadística clásica que acabamos de formular destaca una vez más el carácter convencional de la deducción de la fórmula (2.13). Si hubiéramos obrado de una manera consecuente, tendríamos que obtener cero.

Para concluir este apartado interpuesto, escribiremos otra vez la fórmula para la susceptibilidad magnética (2.13), sustituyendo Σr_i^2 por el cuadrado del radio de Bohr $a^2 = (\hbar^2/m_e e^2)^2$, y el número de átomos en la unidad de volumen N por la magnitud $\frac{1}{a^3} = \left(\frac{(m_e e^2)^3}{\hbar^2}\right)$. La última sustitución significa que examinamos un cuerpo condensado en el cual las distancias entre los átomos son del orden de las dimensiones de los propios átomos.

Como resultado obtendremos

$$|\chi_{dia}| \approx \frac{1}{6}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \approx \frac{1}{6}\left(\frac{1}{137}\right)^2, \qquad (2.16)$$

es decir, la insignificancia de la susceptibilidad diamagnética es consecuencia de la pequeñez de la carga. Recordemos al lector que $e^2/\hbar c$ es el cuadrado adimensional de la carga (véase la pág. 13).

---

*) Está claro que en este caso no se puede considerar que las partículas tienen un momento magnético propio (de espín). Como hemos subrayado, la existencia del espín y del momento magnético de espín es un efecto puramente cuántico.

**) *Problema 14.* Demuestren que el trabajo de la fuerza de Lorentz es igual a cero.

§ 4. METALES. EL PARAMAGNETISMO DE PAULI

Al estudiar el paramagnetismo y el diamagnetismo partimos de que las sustancias constan de átomos (o iones) y moléculas. Pero hay una clase de sustancias muy grande e importante, los metales, que constan de iones y electrones. El metal es una red iónica «bañada» por un gas electrónico. Esta representación que, a primera vista, parece muy primitiva, resulta, al someterla a un análisis, bastante seria, totalmente correcta. Más aún, hasta admite simplificación. Se puede no pensar en los iones que retienen los electrones en el metal *), sino considerar que los electrones se encuentran en la muestra metálica como en un cajón: uno o varios por átomo; no se debe tener en cuenta la acción de los electrones entre sí puesto que las fuerzas de repulsión se compensan, por término medio, por las de atracción a los iones. Los electrones separados de los iones se denominan *electrones libres* o *electrones de conducción*.

Se sobreentiende que éste es un modelo simplificado. El mismo lleva el nombre de modelo de Drude — Lorentz. A pesar de su asombrosa sencillez, después que Sommerfeld introdujo en él las ideas de la estadística cuántica, dicho modelo resultó capaz de explicar muchas propiedades de los metales, además, los resultados obtenidos con su ayuda, en muchos casos se encuentran en buena concordancia con el experimento.

A primera vista, el metal debe ser obligatoriamente un paramagnético. En efecto, los electrones son un gas típico de agujas magnéticas. El número de electrones N_e en la unidad de volumen es enorme: $N_e \approx 10^{22} \ldots 10^{23}$ cm^{-3}. El momento magnético de cada electrón, a escala atómica, también es muy grande, éste es igual al magnetón de Bohr. Es cierto que los iones del metal (¡no podemos olvidarlos por completo!) deben ser diamagnéticos ya que, después de la separación de los electrones de valencia, sus envolturas electrónicas se asemejan en gran medida a las de los átomos de los gases inertes (los metales de los elementos de transición, en particular, los metales del grupo del hierro constituyen una excepción; hablaremos de éstos más tarde). Al parecer,

*) La pregunta de quién retiene a quién carece completamente de sentido. Los iones se dispersarían por impacto de las fuerzas de repulsión electrostática si los electrones no hubieran compensado esas fuerzas.

el diamagnetismo de los iones no puede sobrepasar el paramagnetismo de los electrones de conducción. No obstante, entre los metales se encuentran no sólo los paramagnéticos, sino también los diamagnéticos.

Existe un hecho más que no permite extender directamente las deducciones (obtenidas en el examen del gas de agujas magnéticas) a los electrones de conducción: la susceptibilidad magnética del metal prácticamente no depende de la temperatura.

¿En qué, pues, consiste el asunto? ¿Cuál es la causa de las propiedades especiales del gas electrónico en comparación con el gas clásico de agujas magnéticas? El quid de la cuestión radica en que el gas electrónico en el metal es un *gas cuántico*. Los gases cuánticos son objetos tan importantes de la física moderna del estado condensado de la sustancia que es necesario dedicarles un capítulo especial.

GAS DE FERMI Y GAS DE BOSE

Con anterioridad (pág. 46) ya hemos señalado que todas las partículas se dividen en dos clases: en fermiones y bosones. La diferencia entre los fermiones y bosones es una propiedad cuántica específica que viene condicionada por el comportamiento distinto de la función de onda durante las reordenaciones de las partículas. Tratemos de esclarecer cuándo las «propiedades cuánticas específicas» deben manifestarse en el gas de partículas de masa m_a. El valor de la masa es de suma importancia para lo ulterior, ésta es la razón de que, al caracterizar el gas, comenzamos, precisamente, prefijando la masa de las partículas. Supongamos que el número de partículas de gas en la unidad de volumen es N y la temperatura del gas es T. Es fácil comprender que la distancia media entre las partículas del gas d es igual a $N^{-1/3}$ y no depende, como es natural, de la temperatura. De acuerdo con la física clásica, la energía media de la partícula de gas es $\bar{\varepsilon} = {}^3/_2 kT$. De aquí, el impulso medio $\bar{p} = \sqrt{3kTm_a}$. Ahora recordemos las relaciones de indeterminación (1.17). Mientras la indeterminación de una magnitud física (en este caso, de la coordenada y el impulso) es pequeña en comparación con su valor medio, podemos no pensar en las propiedades cuánticas del sistema ya que éste se comporta como clásico. Pero si esta condición no se cumple, estamos obligados a investigar el sistema empleando las leyes cuánticas.

La distancia media entre las partículas indica con qué precisión se puede prefijar la coordenada de una partícula aislada, es decir, determina la incertidumbre Δx : $\Delta x \approx \approx d = N^{1/3}$. Por consiguiente, de conformidad con las relaciones de indeterminación (1.17), el impulso de cada partícula tiene una incertidumbre Δp no menor que $\hbar/d = \hbar N^{1/3}$. Con el descenso de la temperatura $\bar{p}$ disminuye, y para cierta temperatura T_{cuant} tal que $kT_{cuant} = \hbar^2 N^{2/3}/m_a$ resulta del orden de Δp. De este modo,

para $T \gg T_{cuant}$ el gas puede considerarse clásico, y para $T < T_{cuant}$ es necesario tener en cuenta las leyes de la mecánica cuántica;

$$T_{cuant} - \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m_a k}. \tag{2.17}$$

El gas para $T < T_{cuant}$ se denomina *degenerado*, con la particularidad de que si las partículas de éste son fermiones su nombre es gas de Fermi, y si son bosones, gas de Bose.

Calculemos T_{cuant} para un gas de agujas magnéticas, por ejemplo, para el oxígeno. Al tomar $m_a = 0{,}5 \cdot 10^{-22}$ g (para la molécula de O_2) y $N = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}, obtendremos $T_{cuant} \approx 10^{-3}$ K. Antes de poder manifestar sus propiedades cuánticas, el oxígeno se convertirá en líquido (a -183 °C $\approx \approx 90$ K) y se solidificará (a -219 °C ≈ 54 K). Ahora bien, en los paramagnéticos (no metales) líquidos y sólidos, a bajas temperaturas, ejerce su influjo la acción entre los imanes pequeños, de modo que deja de ser válido el modelo del gas de agujas magnéticas que no entran en interacción.

Un cuadro completamente distinto surge cuando nos dirigimos al gas electrónico en el metal. Para $N_e \approx 10^{23}$ cm^{-3} y $m_e \approx 10^{-27}$ g $T_{cuant} \approx 10^5$ K (¡!), o sea, siempre (¡a cualquier temperatura!) el metal contiene gas electrónico cuántico.

En el capítulo 3 nos referiremos a las propiedades del gas de Bose a $T \lesssim T_{cuant}$. Mientras tanto, aquí sólo nos detendremos en las propiedades del gas de Fermi, ya que los electrones pertenecen a los fermiones.

Por cuanto en las condiciones ordinarias la temperatura T es mucho menor que T_{cuant}, tenemos que analizar, ante todo, un caso límite, o sea, el comportamiento del gas electrónico a $T = 0$.

El estado del electrón libre se caracteriza por el impulso p y la proyección del espín s_z ($s_z = \pm 1/2$). Si el campo magné-

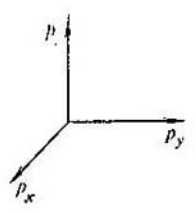


FIG. 23. *Espacio de impulsos. Sobre los ejes de coordenadas se marcan las proyecciones del impulso de la partícula.*

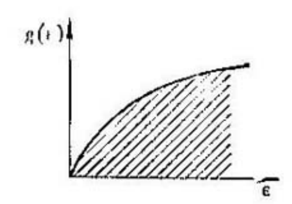


FIG. 24. *Densidad de los estados del sistema de electrones libres.*

tico es igual a cero, la energía del electrón ε no depende de la dirección del espín sino viene determinada tan sólo por el impulso:

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m_e}, \quad \text{o bien} \quad p_x^2+p_y^2+p_z^2=2m_e\varepsilon. \qquad (2.18)$$

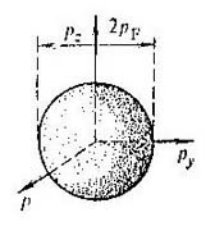
Construyamos un sistema de coordenadas en cuyos ejes marquemos las proyecciones del impulso (fig. 23). Hemos «creado» *el espacio de impulsos*. En este espacio, el impulso en función de la energía (2.18) se representa por medio de una esfera de radio $\sqrt{2m_e\varepsilon}$. Ahora figurémonos que todo el espacio de impulsos está dividido en celdillas infinitamente pequeñas. Cada celdilla corresponde a un valor determinado del impulso $\boldsymbol{p}$. El número de estados (celdillas) dN_ε con impulsos de los electrones entre p y $p+dp$ es proporcional al volumen de una capa esférica de espesor dp *), siendo aquél igual a $4\pi p^2dp \propto \sqrt{\varepsilon d\varepsilon}$ (véase (2.18)).

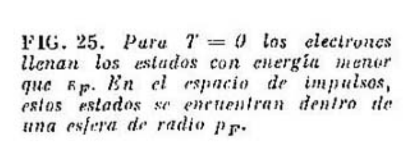
La función $g(\varepsilon)=\frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon}$ lleva el nombre de densidad de los estados. Un análisis más consecuente no sólo permite establecer que $g(\varepsilon)\propto\sqrt{\varepsilon}$, sino también hallar el coeficiente de proporcionalidad:

$$g(\varepsilon)=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2\hbar^3}Vm_e^{3/2}\sqrt{\varepsilon} \qquad (2.19)$$

(V es el volumen de la muestra del metal). El área bajo la curva (2.19) (fig. 24) determina el número de estados con

*) Fíjense que por el momento nos interesa el número de estados con un valor determinado de la magnitud del impulso para su dirección arbitraria.




FIG. 25. *Para $T = 0$ los electrones llenan los estados con energía menor que ε_F. En el espacio de impulsos, estos estados se encuentran dentro de una esfera de radio p_F.*

energía menor que ε. Puesto que, conforme al principio de exclusión de Pauli, cada estado puede ser ocupado tan sólo por un electrón, resulta que para $T = 0$ los electrones llenarán todos los estados incluso hasta los dotados de cierta energía máxima: la energía de Fermi ε_F.

La energía de Fermi se determina partiendo de la condición de que antes de ella cupiesen todos los N_e electrones del metal. Esto significa que para determinar la energía de Fermi es necesario integrar la densidad de los estados desde 0 hasta ε_F e igualar N_e:

$$N_e = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2\hbar^3} V m_e^{3/2} \varepsilon_F^{3/2};$$

De aquí

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e}. \tag{2.20}$$

Cabe señalar que la energía de Fermi ε_F con una precisión de hasta el factor numérico $(3\pi^2)^{2/3}/2$ coincide con la magnitud kT_{cuant}.

Se puede obtener un cuadro patente de completación de los estados por los electrones libres, si se hace uso del espacio de impulsos: para $T = 0$ los electrones en éste llenan la esfera (esfera de Fermi) de radio $p_F = \sqrt{2m_e\varepsilon_F} = \hbar\,(3\pi^2 N_e/V)^{1/3}$ (fig. 25). El radio de la esfera de Fermi $p_F \approx \hbar/d$, donde d es la distancia media entre los electrones (ésta, por el orden de magnitud, coincide con las dimensiones de la celdilla del cristal a).

Vemos que para el cero absoluto de temperatura no cesa el movimiento de las partículas. El principio de exclusión de Pauli es «más fuerte» que la tendencia del sistema a pasar, cuando $T = 0$, al estado de energía mínima *).

*) *Problema 15.* Calculen la energía media de una partícula de gas de Fermi para $T = 0$, expresándola por medio de la energía de Fermi ε_F. JI

7—1598

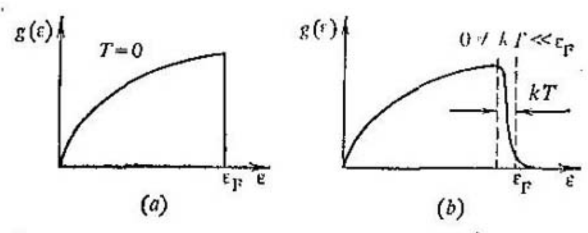


FIG. 26. *Distribución de las partículas del gas de Fermi según las energías a $T = 0$ (a); el área bajo la curva $g = g(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_F)$ es igual al número de electrones, y para $kT \ll \varepsilon_F$ se diferencia tan sólo insignificantemente de la distribución a $T = 0$ (b).*

En la fig. 26, *a* se muestra la distribución de las partículas de gas por energías cuando $T = 0$. Para una temperatura distinta a cero, pero baja ($T \ll T_{cuant}$), la distribución por energías cambia insignificantemente (fig. 26, *b*).

* * *

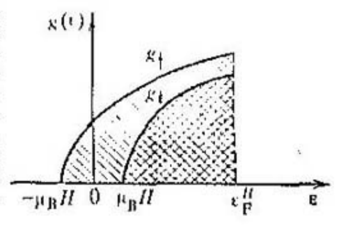
Ahora podemos retornar al examen de las propiedades magnéticas de los electrones de conducción. Cuando el campo magnético $H \neq 0$, las energías de los electrones con espín orientado según el campo y en contra del campo se diferencian entre sí. Al marcar la dirección del espín con una flecha (según el campo, hacia arriba; en contra, hacia abajo), tenemos (véase (1.28)):

$$\varepsilon_\uparrow = \frac{p^2}{2m_e} - \mu H,$$
$$\varepsilon_\downarrow = \frac{p^2}{2m_e} + \mu H. \qquad (2.21)$$

Aquí, como antes, $\mu = e\hbar/2m_e c$.

¿Cómo en este caso los N_e electrones llenan sus estados (celdillas)? La fig. 27 ilustra la distribución de los electrones por energías cuando el campo magnético está conectado. Preston atención al hecho de que los niveles de llenado de los electrones de espín dirigido según el campo y en contra de éste son iguales (tanto $\varepsilon_\uparrow$ como $\varepsilon_\downarrow$ son menores que ε_F^H, que es la energía de Fermi en el campo magnético). Si los niveles de llenado fuesen diferentes, algunos electrones se

FIG. 27. *Distribución de las partículas del gas de Fermi con arreglo a las energías en presencia del campo magnético ($T = 0$): $g_\uparrow$ es la densidad de los estados de los electrones con momento magnético orientado según el campo; $g_\downarrow$, lo mismo, en contra del campo. El área bajo cada una de las curvas es igual al número de electrones correspondientes.*



«trasladarían» a los estados con otra dirección del espín, y la energía del sistema disminuiría.

La cantidad de electrones con espín orientado según el campo magnético es algo mayor que la cantidad de electrones con espines de orientación opuesta, $N_\uparrow > N_\downarrow$, debido a que la energía $\varepsilon_\uparrow < \varepsilon_\downarrow$. A raíz de ello, el gas electrónico resulta imantado según el campo, o sea, resulta *paramagnético*. Para calcular el momento magnético del gas electrónico es necesario hallar la diferencia de la cantidad de electrones según el campo y en contra de éste:

$$M_e = \mu (N_\uparrow - N_\downarrow).$$

Con este fin es preciso calcular $N_\uparrow$ y $N_\downarrow$. No es difícil hacerlo si se advierte que la densidad de los estados con espín en una dirección dada $g_\uparrow(\varepsilon)$ ($g_\downarrow(\varepsilon)$) se distingue de $g(\varepsilon)$ solamente por el factor 1/2 y el origen de cálculo de las energías. Un cálculo simple, basado en que la energía μH— prácticamente para cualquier campo magnético H accesible— es pequeña en comparación con la energía de Fermi ε_F *), demuestra que

$$M_e = \mu^2 \left(\frac{dN_e}{d\varepsilon_F}\right)_{H=0} \cdot H,$$

y la susceptibilidad magnética

$$\chi_P = \frac{3\mu^2}{2}\frac{N_e}{\varepsilon_F}. \qquad (2.22)$$

Hemos empleado la expresión (2.19).

El paramagnetismo del gas electrónico degenerado lleva el nombre de *paramagnetismo de Pauli*.

---

*) *Problema 16.* Demuestren que la igualdad $\mu H = \varepsilon_F$ se logra cuando $H \approx 10^8$ Oe. Los imanes más grandiosos crean campos magnéticos que no superan $5 \cdot 10^5$ Oe.

Para conseguir que la susceptibilidad magnética, al igual que antes, se refiera a la unidad de volumen, consideraremos que N_e es el número de electrones de conducción en 1 cm³.

Al comparar la fórmula (2.22) con la fórmula clásica (2.15), vemos que la diferencia principal consiste en la sustitución de kT por ε_F. Como quiera que siempre $\varepsilon_F \gg kT$, queda claro: la consideración de los efectos cuánticos —del principio de exclusión de Pauli— disminuyó sustancialmente la magnitud de la susceptibilidad paramagnética en comparación con su valor clásico. Debido a la degeneración, la temperatura no desempeña un papel tan importante en las propiedades del gas electrónico como en los gases clásicos. En particular, la susceptibilidad paramagnética de Pauli prácticamente no depende de la temperatura. La susceptibilidad paramagnética del gas de Fermi es del mismo orden de magnitud que la susceptibilidad diamagnética de un cuerpo condensado *).

§ 5. METALES. EL DIAMAGNETISMO DE LANDAU

Cuando hablamos del diamagnetismo tratamos de convencer al lector de que el mismo es un fenómeno general de la naturaleza. ¿No será el gas electrónico una excepción? Esta conjetura se basa en el siguiente «razonamiento». Como subrayamos, la deducción de la fórmula para la susceptibilidad diamagnética (2.13) se basaba en dos circunstancias: en el teorema de Larmor y en la estabilidad de las órbitas. Los electrones libres no tienen órbitas estables y a éstos no es aplicable el teorema de Larmor. Y, sin embargo, el gas electrónico, a la par de susceptibilidad paramagnética, posee también susceptibilidad *diamagnética*, o sea, el llamado diamagnetismo de Landau. La deducción de la fórmula para la susceptibilidad diamagnética del gas electrónico es complicada, por lo cual, simplemente, la citaremos:

$$\chi_L = -\frac{1}{3}\chi_P. \qquad (2.23)$$

---

*) *Problema 17.* Demuestren que con una precisión de hasta los factores del orden de la unidad $\chi_P \approx \left(\frac{1}{137}\right)^2$ (compárenla con la deducción de la fórmula (2.16)).

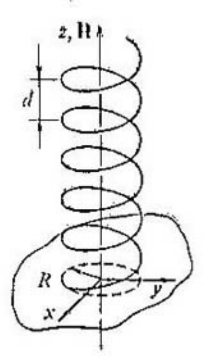


FIG. 28. *El electrón en el campo magnético H describe una espiral cuyo radio es igual a* $R = mcv_{\perp}/|e|H$; *el paso de la espiral (a lo largo del campo magnético) es igual a*

$$d = v_z/\omega_c = mcv_z/|e|H;$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

¿De dónde, entonces, el gas electrónico sacó el diamagnetismo? Los electrones libres no tienen estados estacionarios discretos para $H = 0$. Pero éstos aparecen cuando $H \neq 0$. Se dice que

el movimiento de los electrones en el campo magnético se cuantifica.

La naturaleza de la cuantificación del movimiento de los electrones en el campo magnético es sencilla. Por acción de la fuerza de Lorentz (2.10) el electrón gira alrededor de H con una frecuencia de rotación *) $\omega_c = eH/m_e c$ (fig. 28). Además, el electrón, por supuesto, se mueve a lo largo del campo. Este movimiento suyo no está influenciado en absoluto por la fuerza de Lorentz. La energía del electrón es la suma de energías de los movimientos por el campo y en el plano perpendicular a éste. Veamos los movimientos del electrón en el plano perpendicular al campo magnético. Aquí la palabra «veamos» debe aceptarse en su sentido literal, y no figurado. Bueno, si observamos el electrón que gira de un lado, se ve que realiza oscilaciones con una frecuencia de ciclotrón ω_c (véase la fig. 28). No es una mera

*) Con esta frecuencia el electrón realiza su rotación en el ciclotrón. Esta es la razón de que se llama frecuencia *de ciclotrón.* Fíjense, $\omega_c = 2\omega_L$, donde ω_L es la frecuencia de Larmor de la precesión. El teorema de Larmor (pág. 86) no se refiere al movimiento de los electrones libres ya que en este caso la fuerza de Lorentz no puede considerarse como una perturbación pequeña. No se da otra fuerza (grande) en comparación con la cual la primera sea pequeña.

analogía verbal. Las fórmulas que caracterizan el movimiento del electrón en el plano perpendicular al campo magnético se reducen a las que describen las oscilaciones de la partícula. El lector ya está al corriente del hecho de que la partícula que oscila con frecuencia ω sólo puede tener los niveles discretos de energía $\varepsilon_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$ son números enteros) (véase la pág. 32).

Vuelvan a leer, por favor, el último párrafo. Pensamos que ahora no les asombrará demasiado que

la energía de movimiento del electrón en el campo magnético puede tomar los siguientes valores:

$$\varepsilon = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_H^2}{2m_e}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.24)$$

p_H es la proyección del impulso $\boldsymbol{p}$ sobre $\boldsymbol{H}$.

Si se toma en consideración la existencia del momento magnético propio en el electrón, los niveles (2.24) se desdoblarán en dos sistemas de niveles:

$$\varepsilon_\uparrow = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{p_H^2}{2m_e} - \mu H,$$

$$\varepsilon_\downarrow = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{p_H^2}{2m_e} + \mu H.$$

Ya sabemos a qué lleva este desdoblamiento: al paramagnetismo de Pauli. Debido a ello, por ahora, no lo tendremos en cuenta.

El conocimiento de los niveles de energía de los electrones (2.24) permite calcular su momento magnético y determinar la susceptibilidad magnética. Si no se tienen en cuenta los momentos magnéticos propios de los electrones, el gas electrónico es diamagnético y

$$\chi_L = -\frac{1}{12}\frac{e^2\hbar^2}{m_e^2c^2}\frac{N_e}{\varepsilon_F} = -\frac{1}{3}\chi_P.$$

Si se toma en consideración tanto el diamagnetismo como el paramagnetismo del gas electrónico, se llegará a la fórmula para la susceptibilidad magnética total (véase la fórmula (2.22)):

$$\chi_e = \chi_P - \frac{1}{3}\chi_P = \frac{2}{3}\chi_P = \mu^2\frac{N_e}{\varepsilon_F}. \qquad (2.25)$$

Esta es positiva, es decir, el paramagnetismo prevalece. Entonces, ¿cómo explicar el hecho de que algunos metales son diamagnéticos? Claro está que existe además la armazón

iónica del metal. La misma es diamagnética (véase antes) y su susceptibilidad debe sustraerse de χ_e. Y por cuanto χ_e es insignificante numéricamente, el signo de la susceptibilidad magnética del metal puede ser tanto positivo como negativo. Esta consideración (¡absolutamente justa!) no puede explicar, sin embargo, el diamagnetismo grande de una serie de metales (por ejemplo, del bismuto).

Para dar una explicación exhausativa de las propiedades magnéticas del gas electrónico es necesario tener presente un hecho no reflejado en el modelo de Drude — Lorentz — Sommerfeld. Los electrones de conducción no se desplazan en el vacío, sino en el campo de fuerzas creadas por los iones de la red cristalina. El estudio del movimiento de los electrones en el campo periódico de la red cristalina corre a cargo de *la teoría de las bandas*, capítulo especial de la física cuántica del sólido. Una de las deducciones de esta teoría reza: en una serie de casos el movimiento del electrón en la red puede considerarse cuasilibre *) al sustituir en la expresión (2.18) la masa ordinaria del electrón m_e por la efectiva m^*, es decir, al admitir que

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*}. \qquad (2.26)$$

La diferencia entre la masa efectiva y la ordinaria tiene en cuenta la interacción del electrón con los iones de la red.

¿Cómo cambiarán las fórmulas escritas anteriormente, a causa de la sustitución $m_e \to m^*$? Puesto que no se incluye en esta sustitución la magnitud del magnetón de Bohr μ (el momento magnético propio del electrón es una característica suya tan «íntima» como lo es su carga e, y ambos no están relacionados con el movimiento del electrón en la red **)), resulta que de las fórmulas (2.22) y (2.25) es

---

*) El prefijo «cuasi» (del latín «quasi», supuestamente, casi) permite a veces «tirar la piedra y esconder la mano». Lo mejor es interpretar la introducción del prefijo «cuasi» de la siguiente manera: «No todo es tan simple como lo afirman los autores en el texto» (véase el capítulo 3, § 8).

**) Tal vez esto esté expresado con demasiada fuerza: en algunos conductores es esencial la interacción del momento magnético propio del electrón con el momento magnético orbital de los iones y electrones (dicha interacción se denomina *espín-órbita*). Debido a la interacción espín-órbita varía el momento magnético propio del electrón. Además, el momento magnético del electrón percibe el resultado de la interacción con otros electrones. Esta circunstancia también puede cambiar el valor de μ. Lo primordial es que $\mu \neq$ $\neq e\hbar/2m^*c$ y, por lo tanto, a ciencia cierta $\chi \neq 2/3\chi_p$.

fácil obtener:

$$\chi_e = \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{m_e}{m^*}\right)^2\right]\chi_P; \quad \chi_P = \frac{3}{2}\frac{\mu^2 N_e}{\varepsilon_F^*};$$

$$\varepsilon_F^* = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m^*}. \qquad (2.27)$$

Por muy paradójico que parezca, en algunas ocasiones la masa efectiva del electrón resulta ser incluso muchas veces menor que su masa «verdadera». Estos metales son diamagnéticos, terminantemente. Así se explica el gran diamagnetismo del Bi.

§ 6. LOS SUPERCONDUCTORES SON DIAMAGNÉTICOS IDEALES

Si procuramos hacer un «extracto» enjundioso de todo el relato sobre el diamagnetismo de Landau y formular la causa de su surgimiento, entonces, probablemente, quede lo siguiente: el diamagnetismo surge debido a la rotación de los electrones alrededor de las líneas de fuerza magnéticas. Y el hecho de que para el cálculo es preciso aplicar las leyes de la mecánica cuántica resulta evidente, pues se trata del movimiento de partículas microscópicas, electrones.

Cada electrón de conducción se mueve independientemente de otros. El hecho de que la frecuencia de ciclotrón $\omega_c = eH/m_e c$ es la misma para todos los electrones representa, en cierto sentido, una casualidad. En la teoría más rigurosa que toma en consideración el campo de los iones, esta propiedad no se conserva: la velocidad de rotación de los electrones depende de su energía y de la proyección del impulso sobre el campo magnético. Dicha circunstancia modifica, en cierto sentido, las fórmulas de cuantificación y, por lo tanto, cambia la magnitud de la susceptibilidad diamagnética.

¿Y es posible que los electrones, bajo la acción del campo magnético, giren alrededor de éste como un todo único, digamos, como se mueve el agua en un recipiente que gira? En condiciones habituales, indiscutiblemente que no. La rotación acorde de los electrones significa que por el conductor fluye una corriente macroscópica. Pero ese conductor debe calentarse, y la corriente, decrecer. El campo magnético que, al haberse conectado, excitó este movimiento no puede mantener la corriente ya que no produce trabajo.

De este modo, ¡no existe un movimiento acorde de los electrones!

Pero... siempre hay excepciones de las reglas. Y siempre estas excepciones confirman las reglas, aunque, a decir verdad, para eso es necesario comprender por qué la excepción es posible. La mayoría de los metales a temperaturas muy bajas (próximas al cero absoluto) pasan a un estado peculiar, el *de superconductibilidad* *) que se caracteriza por una conductibilidad igual a cero. Los metales en estado de superconductibilidad se denominan superconductores. Ya los hemos mencionado en el primer párrafo de este capítulo.

En los superconductores pueden circular corrientes no decrecientes. La superconductibilidad fue descubierta en 1911 por H. Kamerling—Onnes al medir la conductibilidad del mercurio, y en el curso de muchos años la causa del surgimiento del estado de superconductibilidad fue un enigma. Tan sólo al cabo de 45 años (en 1956) J. Bardeen, L. Cooper y J. Schrieffer crearon la teoría microscópica de este fenómeno único en su género. Lamentablemente, carecemos de la posibilidad de contar en detalle sobre la superconductibilidad. Nos limitamos a hacer constar: en los superconductores pueden circular corrientes no decrecientes. ¿Cómo se reflejará tal hecho en las propiedades magnéticas de éstos?

A los electrones se les presenta la posibilidad de expulsar por completo las líneas de fuerza magnéticas del seno del metal. Para eso, por la superficie del superconductor debe fluir una corriente que engendra un momento magnético $\mathcal{M} V$ orientado en contra del campo magnético y cuya magnitud constituye $-1/4\pi HV$. De este modo, en un superconductor $B = H + 4\pi\mathcal{M} = 0$, y

el superconductor es un diamagnético ideal.

Escribimos: «a los electrones se les presenta la posibilidad», «por la superficie ... *debe* fluir una corriente». No es sino una figura retórica. En los superconductores situados en el campo magnético, los acontecimientos se desarrollan precisamente así: surge una corriente superficial y debido a

---

*) Para el día de hoy la temperatura más alta de la transición de superconductibilidad la tiene el Nb_3Ge. Ésta es igual a 23 K. Cuando escribíamos este libro habíamos dejado espacios libres para el nombre de la sustancia y la temperatura máxima récord de la transición. La búsqueda de superconductores de altas temperaturas continúa todo el tiempo. La sustancia que acabamos de mencionar fue descubierta en 1973.

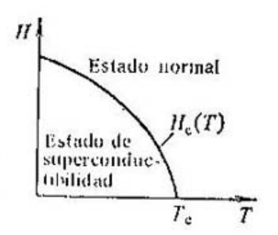


FIG. 29. *Diagrama de estado de un superconductor. La curva $H = H_c(T)$ separa el estado normal del de superconductibilidad.*

FIG. 30. *Almohada magnética. Imán que planea sobre el plato superconductor.*

ésta las líneas de fuerza magnéticas son expulsadas del seno del semiconductor. Este efecto lleva el nombre de *efecto Meissner*. El campo magnético se expulsa porque esto es ventajoso desde el punto de vista energético: la energía del metal para $B = 0$ es menor que para $B \neq 0$. (Hablando en rigor, la corriente en el superconductor no fluye por su superficie, sino por la capa subsuperficial de espesor $\delta \approx \approx 10^{-5}$ cm.)

Cabe señalar una cosa más: el comportamiento de los superconductores que describimos aquí se observa en campos magnéticos relativamente débiles. Un campo magnético fuerte destruye la superconductibilidad, por su influjo el metal pasa al estado normal (no superconductor). En la fig. 29 se representa el diagrama de estado de un superconductor. Se ve el límite de existencia del estado superconductor.

La expulsión del campo magnético del superconductor lo demuestra evidentemente el planeo del pequeño imán sobre el superconductor *) (fig. 30).

---

*) *Problema 18*. Expliquen por qué el imán representado en la fig. 30 no cae. Por primera vez el experimento con el imán planeador fue exhibido por V. K. Arkádiev en 1945. Actualmente este fenómeno encuentra aplicación práctica.

Capítulo 3

EL FERROMAGNETISMO

Entre los cuerpos sólidos existen unos que se imantan *espontáneamente* por influjo de las fuerzas internas y, por lo tanto, pueden servir de fuentes macroscópicas del campo magnético. Estos cuerpos son *ferromagnéticos*. El ferromagnetismo no existe a todas temperaturas. Al ascender ésta, el momento magnético espontáneo propio del cuerpo disminuye, y a cierta temperatura T_c, llamada *temperatura de Curie*, se anula (claro, si falta el campo magnético, es decir, cuando $H = 0$). Por encima de la temperatura de Curie los ferromagnéticos son paramagnéticos.

Todos los ferromagnéticos a alta temperatura son paramagnéticos, mas no todos los paramagnéticos a temperatura baja son ferromagnéticos.

Los valores de la temperatura de Curie T_c y de la densidad del momento magnético espontáneo $\mathcal{M}_s$ (para $T \to 0$) son diferentes para distintos materiales (véase la tabla V).

Tabla V

Sustancia	Fe	Co	Ni
$\mathcal{M}_s$, ergios/Gs	1735	1445	509
T_c, K	1043	1403	631

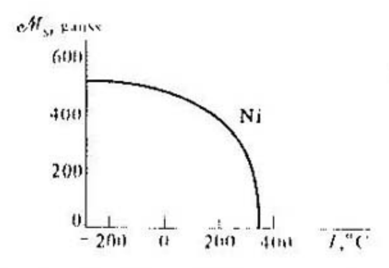


FIG. 31. *La densidad del momento magnético espontáneo del Ni en función de la temperatura.*

En la fig. 31 se representa la densidad del momento magnético espontáneo en función de la temperatura $\mathscr{M}_s(T)$ para el níquel.

§ 1. LOS IMANES ELEMENTALES ATÓMICOS SE ORDENAN A SÍ MISMOS

La investigación de los sistemas físicos que constan de un número macroscópico de partículas, las cuales interaccionan unas con otras, es uno de los problemas más complicados de la física cuántica. Aunque existen métodos bastante generales de solución de semejantes problemas, no se da una receta única. En cada caso concreto es necesario crear un modelo más o menos adecuado, simplificando el problema hasta tal grado que éste admita una solución matemática consecuente.

La comparación con el experimento y la evaluación de los términos despreciados permiten establecer la esfera de aplicación del modelo. Con frecuencia, el modelo describe la situación «en rasgos generales», desviándose de la verdad en los pormenores.

Este breve preliminar tiene por objeto prevenir al lector de que lo expuesto en este párrafo no es sino un modelo simplificado del ferromagnetismo, modelo que capta el comportamiento del sistema, pero no pretende dar una característica detallada. Este se denomina *modelo del campo autocongruente*. Recibió dicho nombre después de haber encontrado aplicación en distintos ámbitos de la física del estado condensado. Con arreglo al ferromagnetismo lleva el nombre de *modelo de Curie — Weiss* por cuanto explicó el origen de la ley de Curie — Weiss (véase la pág. 73, fórmula (2.2)).

Partiremos del hecho de existencia del gas de agujas magnéticas, ya que cada ferromagnético, como ya se ha señalado, a altas temperaturas es paramagnético. Para seguir adelante figúrense un cristal en cada uno de cuyos nudos se encuentra un átomo provisto de una aguja: el momento magnético (fig. 32).

Para evitar cálculos engorrosos consideraremos que $J = 1/2$, $g = 2$ y m_J tiene dos valores: $+1/2$ y $-1/2$; el momento magnético de un átomo por separado es igual al magnetón de Bohr μ. No es la simplificación de que hablamos antes. A ésta es fácil renunciar y examinar el gas de agujas magnéticas con valor arbitrario del momento de la cantidad de movimiento J de cada imán elemental.

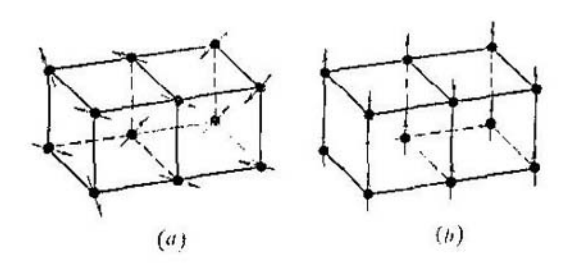


FIG. 32. *Un cristal constituido por átomos paramagnéticos: a) la temperatura T es más alta que la temperatura de Curie T_c; b) $T = 0$, todos los momentos están dirigidos hacia un lado.*

En la mayoría de los casos se considera que los momentos magnéticos de los átomos que constituyen el ferromagnético no son de origen orbital, sino de espín. ¿En qué reside el asunto? ¿Por qué no se hace caso al momento magnético orbital?

Los electrones en el átomo se mueven en un campo de simetría central; por esta razón su momento de la cantidad de movimiento se conserva y puede servir de característica del estado estacionario del átomo. En un sólido el campo de fuerzas en que se mueven los electrones no tiene simetría central, el momento de la cantidad de movimiento no se conserva y para caracterizar el movimiento de los electrones es necesario utilizar otras magnitudes físicas (no podemos detenernos en este problema). El espín del átomo guarda una relación débil con el movimiento orbital de los electrones. Por eso, puede considerarse un número cuántico «bueno». La interacción de los espines uno con otro, así como con el movimiento de los electrones, únicamente orienta los espines atómicos en el espacio, con la particularidad de que en este caso no cambia el valor de cada espín del átomo. El cambio está relacionado con gran pérdida de energía, por lo cual es poco probable (pág. 80). Precisamente estas consideraciones permiten valerse del concepto de gas de agujas magnéticas, *entendiendo por aguja magnética el momento magnético de espín del átomo.*

El modelo de Curie — Weiss consiste en *la suposición simplificadora* de que el momento magnético se ordena no sólo por el campo magnético externo H, sino también por la acción conjunta de todos los momentos magnéticos, la cual *se reduce* a la sustitución del campo magnético H por

un campo autocongruente efectivo *):

$$H_{ef} = H + \alpha\mathcal{M}. \qquad (3.1)$$

Procuraremos argumentar esta expresión en el siguiente párrafo, pero para el modelo de Curie—Weiss la fórmula (3.1) es inicial; la constante α debe estar relacionada con las magnitudes que se observan y, de este modo, determinarse de la experiencia.

Utilizando las fórmulas (2.8) y (3.1) hallamos la ecuación trascendente para determinar la densidad del momento magnético $\mathcal{M}$ del ferromagnético, o sea, la ecuación de Curie — Weiss:

$$\mathcal{M} = N\mu \operatorname{th} \frac{\mu(H+\alpha\mathcal{M})}{kT}, \qquad (3.2)$$

donde N es el número de átomos en unidad de volumen.

El contenido sucesivo del párrafo es el análisis de esta ecuación y sus soluciones.

Comencemos por lo primordial: aclaremos si la ecuación de Curie — Weiss describe el ferromagnetismo, es decir, el surgimiento de la magnetización espontánea $\mathcal{M}_s$ en ausencia del campo magnético. Con este fin analicemos la solución de la ecuación (3.2) para $H = 0$:

$$\mathcal{M}_s = N\mu \operatorname{th} \alpha \frac{\mu\mathcal{M}_s}{kT}. \qquad (3.3)$$

Designemos

$$x = \alpha \frac{\mu\mathcal{M}_s}{kT}, \quad b = \frac{kT}{\alpha\mu^2 N}.$$

Como es fácil comprobar, utilizando estas designaciones la ecuación (3.3) puede escribirse en la forma

$$bx = \operatorname{th} x, \qquad (3.3')$$

idónea para el análisis gráfico. Examinemos la fig. 33. Se ve que para $b \geq 1$ la ecuación tiene tan sólo una solución, $x = 0$, mientras que para $b < 1$ hay tres. La desigualdad $b > 1$ significa que $T > \alpha\frac{\mu^2 N}{k}$. Si $\alpha > 0$ resulta que a altas temperaturas la magnetización espontánea (de acuerdo con la ecuación (3.3)) es igual a cero ($\mathcal{M}_s = 0$). La magnitud $\alpha\frac{\mu^2 N}{k}$

---

*) Efectivamente es una simplificación fundamental. La examinaremos más adelante.

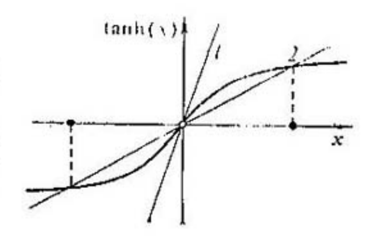


FIG. 33. *Solución gráfica de la ecuación de Curie — Weiss (3.3): 1, recta cuya tangente del ángulo b es mayor que la unidad; 2, recta cuya tangente del ángulo b es menor que la unidad. Los puntos en el eje de abscisas son raíces de la ecuación (3.3).*

es natural considerarla igual a la temperatura de Curie T_c, pues precisamente a $T = T_c$ desaparece la magnetización espontánea. De este modo,

$$\alpha \frac{\mu^2 N}{k} = T_c.$$

Por cierto, tenemos que comprobar, además, si la ecuación (3.2) describe el paramagnetismo del gas de agujas magnéticas para $T > T_c$. Entre tanto, recordemos que $\alpha > 0$.

Pero, ¿qué significa la existencia de tres soluciones cuando $T < T_c$? Está claro que de esas tres hay que elegir una. ¿Y basándose en qué principio? La respuesta es como sigue: la solución $\mathcal{M}_s = 0$ es inestable y, por lo tanto, no se realiza, en cambio, las soluciones distintas a cero ($\mathcal{M}_s \neq 0$) son estables. Se realiza una de ellas. Por ahora podemos prescindir de la preocupación de cuál de las dos: se distinguen sólo por la dirección del vector $\mathcal{M}_s$ y a nosotros nos interesa la magnitud de dicho vector. Si se tratarse de una sola partícula, entonces, los estados estables e inestables podrían representarse por medio de la energía potencial U en función de la coordenada x. Supongamos que la energía potencial tiene la forma representada en la fig. 34. La fuerza que actúa sobre la partícula es igual a cero en tres puntos donde $U(x)$ tiene un extremo: $x_1 = -x_3 \neq 0$, $x_2 = 0$. Sin embargo, la posición de la partícula es estable tan sólo en los puntos x_1 y x_3 (donde $U(x)$ es mínima). Del punto $x_2 = 0$ (donde $U(x)$ es máxima) la partícula se deslizará al surgir cualquier acción casual.

La física estadística formula una regla estricta que permite distinguir la solución estable de la ecuación de Curie — Weiss de su solución inestable. La misma se parece mucho a la regla antes formulada. Es preciso hallar el valor de $\mathcal{M}_s$ para el cual tiene mínimo cierta magnitud llamada *energía libre*. La energía libre se diferencia de la energía como tal, por el hecho de que toma en consideración el número de proce-

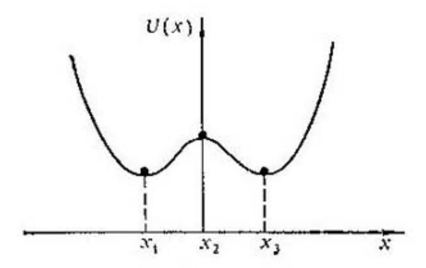


FIG. 34. *Energía potencial de la partícula: en los puntos x_1, x_2 y x_3 la fuerza que actúa sobre la partícula es igual a cero; en los puntos x_1 y x_3 la partícula se encuentra en posición estable, y en el punto x_2, en posición inestable.*

dimientos por medio de los cuales se puede crear un estado macroscópico dado con una energía prefijada. Es estable el estado que puede realizarse por un número máximo de procedimientos. Así que, cuando $T < T_c$, la energía libre es *máxima* para $\mathcal{M}_s = 0$.

Ahora pasemos a esclarecer cómo depende $\mathcal{M}_s$ de la temperatura cuando $T < T_c$. Comencemos por la zona de temperaturas que linda directamente con la temperatura de Curie ($T \lessdot T_c$). Para $T = T_c$ la densidad del momento magnético $\mathcal{M}_s = 0$. Está claro que a $T \approx T_c$ el momento magnético es muy pequeño. Eso permite utilizar una expresión aproximada para th x:

$$\operatorname{th} x \approx x - \frac{1}{3} x^3, \quad x \ll 1.$$

Al sustituir th x por su valor numérico notamos que se puede simplificar x (no nos interesa la solución nula) y el valor no nulo de $|x|$ es como sigue:

$$|x| = \sqrt{3(1-b)}.$$

Ahora es tiempo de volver a las variables físicas:

$$\mathcal{M}_s = N\mu \sqrt{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}. \qquad (3.4)$$

Presten atención al hecho de que, al escribir el factor ante la raíz, sustituimos T por T_c. La aproximación utilizada para th x requiere tal sustitución.

A temperaturas mucho más bajas que la de Curie ($T \ll \ll T_c$) hay que utilizar el valor de th x para grandes valores de x:

$$\text{th}\, x \approx 1 - 2e^{-2x}, \quad x \gg 1$$

$$\mathcal{M}_s = N\mu\,(1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T}}), \quad T \ll T_c. \qquad (3.5)$$

Aquí la aproximación empleada exigió sustituir en el exponente la magnitud $\mathcal{M}_s$ por su valor a $T = 0$ ($\mathcal{M}_s\,|_{T=0} = N\mu$).

Vemos que la ecuación de Curie — Weiss describe la completa magnetización del ferromagnético para $T = 0$: todos los momentos magnéticos son paralelos y $\mathcal{M}_s = N\mu$. Con el crecimiento de la temperatura la densidad del momento magnético disminuye, con la particularidad de que en el instante de desaparición, cuando $T = T_c$, la derivada dM_s/dT se hace infinita.

La comparación de las fórmulas (3.4) y (3.5) con la fig. 31 demuestra que éstas, en rasgos generales, definen correctamente la variación de $\mathcal{M}_s$ en función de la temperatura, $\mathcal{M}_s(T)$. En semejantes casos, en los artículos científicos se escribe: «Existe una concordancia cualitativa entre la teoría y el experimento». La palabra «cualitativa» subraya que el autor no responde por la concordancia cuantitativa. En este caso concreto se revela con especial nitidez la incoincidencia *cuantitativa* de los resultados del experimento con la teoría a bajas temperaturas: cuando $T \ll T_c$, el momento magnético espontáneo tiende mucho más lentamente a la saturación $\mathcal{M}_s\,|_{T=0} = N\mu$, que lo que predice la fórmula (3.5).

Más adelante hablaremos de una comparación más exacta, y ahora calcularemos la susceptibilidad magnética del ferromagnético por encima y por debajo de la temperatura de Curie. Al calcular la susceptibilidad magnética tenemos que considerar como infinitamente pequeño el campo magnético H *). Para $T > T_c$, a un campo infinitamente pequeño le corresponde una densidad infinitamente pequeña del momento magnético. A raíz de ello, en la ecuación (3.2)

*) Formalmente se denomina susceptibilidad magnética χ a derivada $d\mathcal{M}/dH$ para $H \to 0$. Cuando la magnetización depende incalmente de H, esta definición de χ coincide con la antes utilizada.

podemos sustituir th $\frac{\mu(H+\alpha\mathcal{M})}{kT}$ por su argumento, es decir,

$$\mathcal{M}=\frac{N\mu^2(H+\alpha\mathcal{M})}{kT},$$

o bien,

$$\mathcal{M}=\frac{N\mu^2}{k(T-T_c)}H,\quad T>T_c,\quad H\to 0.$$

De aquí

$$\chi=\frac{N\mu^2}{k(T-T_c)}\ \text{para}\ T>T_c, \tag{3.6}$$

y vemos que *de la ecuación de Curie — Weiss se deduce la ley de Curie — Weiss*, o sea, el modelo del campo autocongruente describe correctamente el estado paramagnético del ferromagnético para $T<T_c$.

Cuando $T<T_c$ la cuestión es mucho más complicada, puesto que por debajo de la temperatura de Curie existen tanto el momento magnético espontáneo $\mathcal{M}_s(T)=\mathcal{M}(T, H=0)$ como el campo inducido, proporcional a H:

$$\mathcal{M}(T,H)=\mathcal{M}_s(T)+\chi H,\quad \mu H\ll kT.$$

En la cercanía inmediata del punto de Curie y cuando H tiende a cero, ambos sumandos son muy pequeños, lo que permite utilizar el valor aproximado de la tangente hiperbólica. Unos cálculos no complicados llevan a la siguiente expresión:

$$\chi=\frac{N\mu^2}{2k(T_c-T)}\ \text{para}\ T\leqslant T_c. \tag{3.7}$$

En la fig. 35 se representa χ en función de la temperatura. Cabe señalar: si contamos la temperatura desde el punto de Curie, entonces, a la izquierda (cuando $T\leqslant T_c$) χ es dos

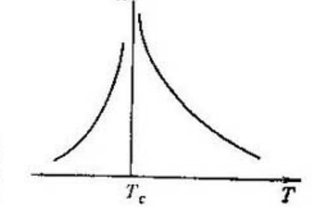


FIG. 35. *Susceptibilidad magnética χ de un ferromagnético en función de la temperatura próxima a la de Curie T_c.*

veces menor que a la derecha a esa misma distancia (para $T \gtrsim T_c$) *).

Hagamos una sinopsis de las conclusiones que podemos sacar (y que hemos sacado ya) analizando la solución de la ecuación de Curie — Weiss.

1. La suposición de que existe un campo interno proporcional a la magnetización ($\alpha < 0$) dio la posibilidad de explicar la aparición de la magnetización propia cuando $T < T_c$.

2. El parámetro α introducido en la teoría determina la temperatura de Curie: $kT_c = \alpha\mu^2 N$. Por cuanto $\mu N = \mathcal{M}_s|_{T=0}$, $\mathcal{M}_{s0}$, resulta que $\alpha = kT_c/\mu\mathcal{M}_{s0}$. El parámetro $\alpha \gg 1$. Este hecho puede comprobarse valiéndose de la tabla V (en la pág. 108) y de la magnitud del magnetón de Bohr μ.

3. El momento magnético disminuye con la elevación de la temperatura y $-\frac{d\mathcal{M}_s}{dT}\big|_{T=T_c} = \infty$.

4. La susceptibilidad magnética se incrementa al aproximarse al punto de Curie haciéndose infinita cuando $T = T_c$. Para $T \to 0$ la susceptibilidad magnética χ es exponencialmente pequeña **); cuando $T > T_c$, la ecuación de Curie — Weiss conduce a la ley de Curie — Weiss.

§ 2. EL FERROMAGNETISMO ES RESULTADO DE LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS DE INTERCAMBIO

Volvamos a analizar el modelo de Curie — Weiss. Está claro que su esencia, su contenido principal radica en la relación del campo efectivo H_{ef} con la densidad del momento magnético. Como suponemos, esta relación tiene en cuenta la interacción de los momentos magnéticos de los átomos. ¿Pero de dónde surgió la expresión (3.1)? Por supuesto, podemos no hacer esta pregunta. Se puede escribir una fórmula «sacándola de la cabeza», indagar a qué resultados

*) *Problema 19.* Deduzcan todas las fórmulas de este párrafo para $J = 1$ o, aún mejor, para J arbitrario. Probablemente éste sea el más complicado de los problemas ofrecidos.

**) *Problema 20.* Demuestren que de acuerdo con la ecuación de Curie — Weiss $\chi = \left(\frac{d\mathcal{M}}{dH}\right)_{H\to 0} \sim e^{-\frac{2T_c}{T}}$ para $T \to 0$ (véase la nota en la pág. 114.

lleva (ya lo hemos hecho), demostrar de qué modo las constantes (α, $N\mu$) que forman parte de la ecuación pueden estar relacionadas con las magnitudes conocidas del experimento (T_c, $\mathcal{M}_{s0}$), convencerse de la coincidencia bastante buena de la dependencia presagiada de $\mathcal{M}_s$ respecto a la temperatura con los datos experimentales y limitarse a ello. Pero en este caso hay que percatarse, con toda claridad, de que hemos construido no una teoría microscópica, sino *fenomenológica*, o sea, una teoría que describe el fenómeno, y no lo explica. Es preciso darse cuenta de que no sabemos la procedencia de la expresión fundamental (en este caso, de (3.1)), no sabemos cuál es la naturaleza (el sentido físico) del factor α, ni cómo está relacionado con los imanes atómicos microscópicos y con su acción recíproca.

La finalidad de este párrafo consiste en descubrir el sentido físico del modelo de Curie — Weiss.

Retornemos a la fig. 32. Las flechas que representan los momentos magnéticos de los átomos, a costa de su interacción se alinean paralelamente, mientras que el movimiento térmico altera este orden. ¿Qué fuerzas actúan entre los imanes atómicos? Hemos hablado mucho de eso en el primer capítulo (§ 10), estableciendo que

las fuerzas de intercambio a distancias atómicas son muchas veces mayores que las fuerzas magnéticas dipolares.

Debido a ello, son precisamente las fuerzas de intercambio las que responden por el ferromagnetismo. Con el fin de cerciorarse de este hecho, hagamos uso del hamiltoniano de espín (1.39) el cual generalizaremos, considerando que entre dos átomos cualesquiera del cristal existe la siguiente interacción de intercambio:

$$\mathcal{H}_S = \overline{E} - \sum_{i,\,k} A_{ik} s_i s_k. \tag{3.8}$$

La suma se lleva a cabo por todos los átomos del cristal, y los subíndices i y k numeran sus átomos. Recordemos ahora lo expuesto acerca de la relación entre A y la distancia entre los átomos: las integrales de intercambio A_{ik} disminuyen muy rápidamente con la distancia. Por esta causa, aunque, desde el punto de vista formal, todo átomo del cristal está ligado por medio de la interacción de intercambio con la totalidad de los átomos, tan sólo es sustancial la relación de

los átomos vecinos. Esta consideración permite volver a escribir la expresión (3.8) en la siguiente forma:

$$\mathscr{H}_S = \bar{E} - \frac{1}{2} A \sum_i s_i \sum_k{}' s_k \qquad (3.8')$$

El apóstrofo junto al signo de la suma señala que durante la adición respecto a k se tienen en cuenta tan sólo los vecinos más próximos al i-ésimo átomo.

En la fig. 36 se ve que para la red cúbica simple el número de vecinos más próximos es igual a seis, y para la red cúbica centrada en el cuerpo su número es igual a ocho (examinaremos solamente redes cúbicas). La integral de intercambio está sacada fuera del signo de la suma, ya que la muestra es homogénea y todas las integrales de intercambio son idénticas; un medio aparece debido a que sumando de esta manera los átomos se cuentan dos veces.

Los vectores s_i y s_k son, como se sobreentiende, «cuánticos». Cada uno de ellos puede orientarse en el espacio por $2s + 1$ métodos. Si $s = 1/2$, sólo por dos métodos: según ... o en contra de ... . La elección del eje de cuantificación, es decir, de la dirección respecto a la cual se orientan los espines, la postergaremos para más adelante. En condiciones de cero absoluto de temperatura todos los momentos magnéticos y, por consiguiente, también los espines son paralelos unos a otros. En todo caso, precisamente así resultaba de la solución de la ecuación de Curie — Weiss: $\mathscr{M}_{s0} = N\mu$. Cuando todos los espines son paralelos entre sí, entonces, de

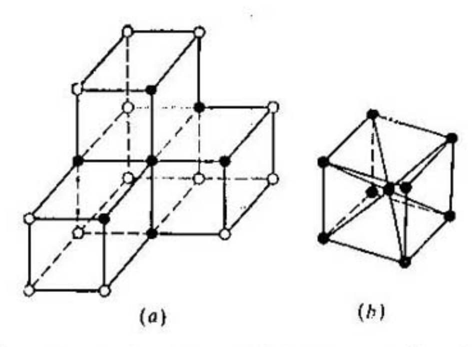


FIG. 36. *Los vecinos más próximos del átomo destacado: a) en una red cúbica simple son seis; b) en una red cúbica centrada en el cuerpo son ocho.*

conformidad con (3.8'), la energía del cristal que depende de la orientación de los espines es

$$E_S = -\frac{zANs^2}{2}, \tag{3.9}$$

donde z indica el número de vecinos más próximos. Para $T = 0$ la energía del cristal debe ser mínima entre todas las posibles. Por supuesto, esto se refiere también a su parte de espín. Se ve que, para conseguir que la disposición paralela de los espines corresponda a la energía mínima, es necesario que la integral de intercambio A sea positiva:

$A > 0$ *es la condición del ferromagnetismo.*

Si la temperatura se diferencia de cero, los momentos magnéticos no son tan disciplinados: a temperatura muy baja algunos espines están desviados de la dirección general correcta, con el ascenso de la temperatura el número de espines «incorrectos» aumenta y, como resultado, disminuye el momento magnético total. Por fin, a cierta temperatura —que es, precisamente, la temperatura de Curie T_c—, todas las direcciones permitidas resultan equiprobables y el momento magnético del ferromagnético se reduce a cero. A $T > T_c$ el ferromagnético se comporta como un paramagnético.

No se debe pensar que el cuadro presentado es estático. No dependen del tiempo los números medios de los espines «correctos» e «incorrectos», pero si tuviéramos la posibilidad de observar el espín de un átomo sislado, descubriríamos que su dirección varía constantemente: ora «mira» a un lado, ora al otro. Esto es, precisamente, el movimiento térmico caótico de los espines.

Para las temperaturas cerca del cero absoluto el movimiento térmico de los espines puede analizarse más detalladamente. A este tema está dedicado el § 10 del presente capítulo.

El cuadro cualitativo de la destrucción del orden magnético que hemos presentado, considerando que a cero absoluto todos los espines son paralelos unos a otros debido a la interacción de intercambio, no nos da la posibilidad de deducir, a partir del hamiltoniano de espín, la expresión para el campo efectivo (3.1). Más aún: eso no se puede hacer. Con el fin de explicar esta afirmación triste, procedamos de la siguiente manera.

Relacionemos $H_{ef} = \alpha\mathscr{M}_s$ (admitimos que $H = 0$) con la energía *) del sistema. Para conseguirlo, generalicemos la fórmula (1.26) para la energía del momento magnético en el campo externo. Conforme a esta fórmula $H = -d\,\frac{d\mathscr{E}M}{dM}$, cuando los vectores H y M son paralelos. Si se quiere que dicha fórmula se cumpla también para el campo efectivo hay que considerar que

$$\mathscr{E}_M = -\frac{1}{2}\alpha\mathscr{M}_s^2 V, \tag{3.10}$$

donde V es el volumen de la muestra. Recordemos que el momento total de un ferromagnético es $M = \mathscr{M}V$.

Vemos que en el modelo de Curie — Weiss la energía libre del sistema viene determinada unívocamente por la magnetización. Mientras tanto, en realidad, como se ve de las fórmulas (3.8) y (3.8′), la misma depende sustancialmente de la distribución microscópica de los espines de distintos átomos. *El desprecio de esta circunstancia es, precisamente, la principal simplificación en el modelo de Curie — Weiss*, o bien, en forma más general, en el modelo del campo autocongruente.

Sin embargo necesitamos la fórmula (3.10) no sólo para las afirmaciones negativas que hacen constar nuestra impotencia. Dicha fórmula ayuda a «asir» el modelo de Curie — Weiss a las fuerzas de intercambio reales que aseguran la existencia del ferromagnetismo. Con este fin comparemos la fórmula (3.9) con la (3.10) sustituyendo en ella la densidad del momento magnético $\mathscr{M}_s$ a $T = 0$ por su valor $N\mu$, y V por la unidad (entonces, N será el número de átomos en la unidad de volumen). Las dos fórmulas coinciden si admitimos:

$$\alpha = \frac{z}{4}\frac{A}{\mu^2 N} = \frac{z}{4}\frac{A}{\mu\mathscr{M}_{s0}} \quad \text{o bien} \quad kT_c = \frac{z}{4}A. \tag{3.11}$$

Sin duda alguna, precisamente la última fórmula es el principal resultado positivo de este párrafo. La integral de intercambio A es un parámetro microscópico cuyo valor viene determinado por la estructura del átomo, por la distancia que separa los átomos unos de otros, es decir, por las dimensiones de la celdilla del cristal. Su cálculo es tarea de la física *atómica*. Ahora bien, se averiguó que la integral de in-

*) Cuando $T \neq 0$ se trata de la energía libre (véase la pág. 112).

tercambio A determina una de las características principales del ferromagnético, su temperatura de Curie.

La fórmula (3.11), además, permite evaluar numéricamente el parámetro $\alpha \approx \frac{A}{\mu_0 \mathcal{M}_{s0}}$. Acuérdense de lo que se ha dicho acerca de la integral de intercambio en el § 10 del capítulo 1: esta integral es de origen electrostático. Evaluemos ahora la magnitud $\mu_0 \mathcal{M}_{s0} = \mu^2 N$. La misma, al igual que A, tiene la dimensión de energía. Como N es el número de átomos en la unidad de volumen, resulta que $N \approx 1/a^3$, donde a, como siempre, es la distancia interatómica. A raíz de ello $\mu^2 N \approx \mu^2/a^3$ es la energía de la interacción magnética dipolo-dipolo. En la pág. 56 hemos demostrado que esta energía es muchas veces menor que la de la interacción electrostática U_{coul} y, por consiguiente, también que A. De este modo, en correspondencia con lo expuesto anteriormente (a base de la comparación con los datos experimentales), $\alpha \gg 1$.

METALES FERROMAGNÉTICOS

El párrafo que acababan de leer es central en este capítulo, ya que explica la naturaleza del surgimiento del ferromagnetismo. Sin embargo, puede dejar a uno perplejo. En efecto, los ferromagnéticos más conocidos —el hierro, cobalto, níquel— son metales. ¿Por qué, entonces, no decimos nada sobre los electrones libres, sino que razonamos de una forma tal como si se tratase de un dieléctrico? Se podría alegar el que existen numerosos dieléctricos ferromagnéticos, y con éstos el análisis realizado guarda una relación directa. Pero, en esencia, dicho análisis es idóneo también para un metal ferromagnético. El asunto reside en que los átomos de todos los metales ferromagnéticos no tienen completadas las envolturas d o las f (véase el § 9 del capítulo 1). Los electrones de estas envolturas se encuentran muy cerca del núcleo (en el seno del átomo) y, prácticamente, no se ven afectados por el hecho de la unificación de los átomos en el cristal. En la formación del momento ferromagnético el papel principal pertenece, precisamente, a los electrones d y f de los metales magnéticos. Podemos formar la siguiente idea al respecto: en los nudos de la red cristalina están concentrados (localizados) los momentos magnéticos electrónicos que entran en acción recíproca por vía de interacción de intercambio. Pero, a diferencia de los die-

léctricos, éstos están sumergidos en el gas de electrones libres los cuales también toman parte en la creación del momento magnético. Sin embargo, el principio de exclusión de Pauli impide que los espines de los electrones de conducción, en su totalidad, se alinean paralelamente unos a otros: sólo resultan un poco magnetizados, de modo complementario, por los electrones *d* y *f*. La magnetización complementaria se efectúa a costa de la interacción de intercambio.

Este cuadro simplificado de la «constitución» de los metales ferromagnéticos lleva el nombre de *modelo de intercambio s — d (f)*, debido a que los electrones de conducción proceden de los electrones *s* de los átomos del metal.

La principal simplificación adoptada en el modelo de intercambio *s — d (f)* consiste en despreciar el papel de los electrones de conducción en la interacción de intercambio entre los electrones *d* o *f*.

Aunque la utilización de los metales ferromagnéticos comenzó mucho tiempo antes de haber penetrado en la naturaleza del magnetismo, precisamente el magnetismo de los metales presenta especial dificultad para su plena comprensión. En la actualidad este ámbito de la física de fenómenos magnéticos se desarrolla activamente.

§ 3. TRANSICIÓN "PARA — FERRO", UNA DE LAS TRANSICIONES DE FASE DE SEGUNDO GÉNERO

El cambio de las condiciones exteriores conduce al cambio de las propiedades de los cuerpos. Al calentar un semiconductor aumentamos su conductibilidad, el calentamiento de un ferromagnético disminuye su magnetización; cuando comprimimos un sólido disminuimos su volumen, etc., etc. Los ejemplos pueden enumerarse infinitamente.

Por lo general, el cambio insignificante de las condiciones exteriores (temperatura, presión) lleva a cambios insignificantes en las propiedades. Por esta causa, la relación «propiedad — condiciones exteriores» puede representarse en forma de una curva continua. Ya hemos visto ejemplos de semejantes curvas: la variación de la magnetización o de la susceptibilidad magnética en función de la temperatura. No obstante, a veces, un cambio insignificante de las condiciones externas conduce a consecuencias «catastróficas»: o una de las características del cuerpo varía irregularmente,

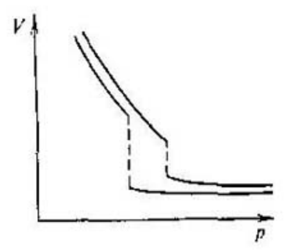


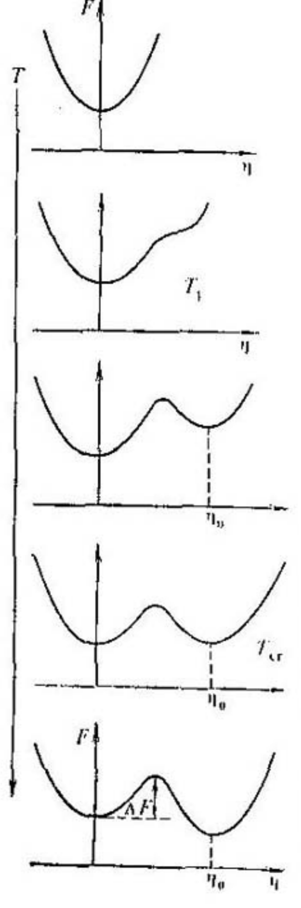
FIG. 37. *Variación del volumen específico V en función de la presión P durante la transición de la fase gaseosa a la líquida (están representadas dos isotermas).*

o bien aparece una propiedad que no ha existido antes. En la fig. 37 se ofrece la dependencia del volumen específico de un gas respecto a la presión. Se observa que a cierta presión el volumen específico cambia bruscamente. El gas se convierte en líquido. Con anterioridad fue descrito el ejemplo de aparición (desaparición) de una propiedad: a la temperatura de Curie T_c aparece (desaparece) la magnetización del cuerpo. Para $T > T_c$ la magnetización falta totalmente, ésta está ausente también en el propio punto de Curie (claro que en ausencia del campo magnético). La variación brusca del volumen es un ejemplo de la transición de fase de primer género, mientras que la aparición (desaparición) de la magnetización, es decir, la transición «para — ferro», es un ejemplo de la transición de fase de segundo género. Por supuesto, los ejemplos no son una definición estricta. Sin abstraernos de la esencia de nuestro relato es difícil dar esta estricta definición de las transiciones de fase del primero y segundo géneros. No lo haremos. Sólo prestemos atención al siguiente hecho: si el salto existe tenemos la transición de fase de primer género; si no existe un cambio brusco, tenemos una transición de fase de segundo género.

Naturalmente, se deben comparar (si hay o no hay cambio brusco) características de un mismo tipo. Por ejemplo se dan sustancias para las cuales, en determinadas condiciones, varía bruscamente la magnetización, o sea, tiene lugar la transición de fase magnética de primer género. En adelante aún nos encontraremos con una situación de este tipo (véase el cap. 4). Por otra parte, durante la transición «para — ferro» varía bruscamente la capacidad calorífica del cuerpo. En cambio, cuando tenemos una transición de primer género se desprende o se absorbe calor como durante la fusión y la ebullición (¡recuerden la fórmula de Clapeyron — Clausius!). Lamentablemente, no se nos ofrece la posibilidad

de detenernos con algunos pormenores en todos estos problemas tan interesantes.

Ya sabemos que el valor de equilibrio del momento magnético minimiza la energía (mejor dicho, la energía libre F) del cuerpo. Esta propiedad de minimizar la energía libre, es propia de muchas características de los sistemas físicos. Para no limitarse tan sólo a las propiedades magnéticas, designemos con la letra η el parámetro que caracteriza cierta propiedad del cuerpo. La energía libre F es la función de



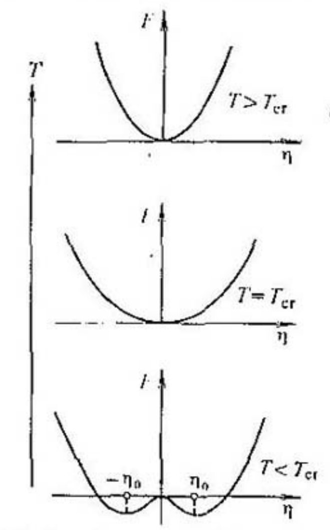


FIG. 38. *Transformación (al variar la temperatura T) de la dependencia de la energía libre F respecto al parámetro η en la transición de fase de primer género. Cuando $T = T_1$ se engendra un nuevo mínimo (para $\eta \neq 0$). Si $T_1 < T < T_{cr}$, el estado con $\eta = \eta_0 \neq 0$ es metaestable, y para $T > T_{cr}$ es estable.*

FIG. 39. *Lo mismo que en la fig. 38, pero para la transición de fase de segundo género. El estado estable (para $T > T_{cr}$) con $\eta = 0$ se transforma en inestable y aparecen (cuando $T < T_{cr}$) estados estables con $\eta = \pm\eta_0 \neq 0$.*

este parámetro: $F = F(\eta)$. En la transición de fase de primer género, η, a cierta temperatura crítica T_{cr}, experimenta un cambio brusco, y en la transición de fase de segundo género, a $T \geqslant T_{cr}$, $\eta(T) \equiv 0$, y a $T < T_{cr}$, $\eta(T) \neq 0$; T_{cr} es el punto de transición de fase de segundo género si $\eta(T_{cr}) = 0$. El valor de equilibrio de $\eta = \bar{\eta}(T)$ se halla de la condición del mínimo

$$\frac{dF}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\eta^2} > 0. \tag{3.12}$$

Queremos señalar cómo, al cambiar la temperatura, se deforma la función $F(\eta)$, lo cual, en esencia, sirve, precisamente, de causa de la transición de fase. La fig. 38 ilustra un caso de transición de fase de primer género, y la fig. 39, de segundo género. Se ve que en la transición de fase de primer género, en la curva $F = F(\eta)$ se engendra un nuevo mínimo, y a $T > T_{cr}$ éste resulta más profundo que el primero. Sin embargo, para pasar del «viejo» mínimo al «nuevo», el sistema debe superar una barrera de potencial determinada, salvar la «cresta» de la altura ΔF que separa un mínimo del otro. A bajas temperaturas este proceso, por regla general, es muy dificultoso (su probabilidad es proporcional a $e^{-\Delta F/kT}$) y el sistema puede encontrarse en estado sobreenfriado o en estado sobrecalentado. Tales estados se denominan metaestables. A veces, para pasar del estado metaestable al establo son insuficientes incluso las épocas geológicas, y el cuerpo perdura en estado metaestable (un buen ejemplo de estado metaestable extraordinariamente duradero es el diamante, cuya transformación espontánea en grafito no fue observada por nadie).

Durante la transición de fase de segundo género, cuando aparece el nuevo mínimo (por debajo de T_{cr}), el mínimo anterior se convierte en máximo (véase la fig. 39). Es natural que resulten imposibles cualesquiera sobreenfriamiento o sobrecalentamiento *).

Por supuesto, todo este cuadro es muy esquemático y aproximado, sin embargo, desde el punto de vista cualitativo, re-

*) *Problema 21.* Partiendo de la expresión $F = \frac{1}{2} a (T - T_{cr}) \eta^2 + \frac{1}{4} b\eta^4$ (a y b son constantes) calculen $\bar{\eta}$ y demuestren que para $b > 0$ esta función describe la transición de fase de segundo género (L. D. Landau, 1937). Relacionen los parámetros a, T_{cr} y b con las magnitudes que caracterizan la transición «para»—«ferro».

presenta correctamente la diferencia entre la transición de fase de segundo género y la de primer género. La divergencia entre los cuadros verdadero y simplificado es especialmente sustancial en el caso de la transición de fase de segundo género (de lo expuesto más adelante quedará claro con qué está ligada la complejidad del problema al investigar precisamente las transiciones de fase de segundo género). Como ya hemos tenido la oportunidad de advertir, las figs. 38 y 39 que representan la dependencia $F(\eta)$ recuerdan mucho la variación de la energía potencial U en función de la coordenada x, la cual permite investigar las condiciones de estabilidad del cuerpo que se mueve a lo largo del eje x. Para sostener la analogía denominaremos el parámetro η «coordenada generalizada», y «cuerpo», el estado del sistema definido por el parámetro η. Así pues, en el punto con «coordenada generalizada», donde $F(\eta)$ tiene un mínimo, el «cuerpo» se encuentra en estado estable o estado metaestable.

¿Qué significa «se encuentra»? Esto significa que el «cuerpo», a costa del movimiento térmico, realiza oscilaciones pequeñas precisamente alrededor de ese punto. (Para comprenderlo bien, figúrense un péndulo inmóvil que oscila por impacto de las moléculas del aire que lo rodean. Incluso si el péndulo se encuentra dentro de una funda de la cual se ha extraído el aire, el péndulo oscilará, ya que el movimiento térmico caótico de los átomos que lo constituyen cambiará la posición de su centro de gravedad.) La amplitud de las oscilaciones del «cuerpo» depende de la pendiente de la curva $F(\eta)$ en el punto de equilibrio *). Ahora fíjense en la fig. 39. La curva $F = F(\eta)$ en esta figura (para $T = T_{cr}$) aparece muy aplanada debido a que, con una variación infinitamente pequeña de la temperatura, la misma debe transformarse en una curva con un máximo y dos mínimos **). Está claro que para $T = T_{cr}$ la amplitud de las oscilaciones es grande.

Tenerlas en cuenta resultó un problema muy complicado. Tan sólo en los tiempos más recientes los físicos obtuvieron la seguridad de que saben describir con alto grado de precisión las propiedades de los sistemas físicos en la proximidad inmediata del punto de transición de fase de segundo género.

---

*) El nivel de ascenso del «cuerpo» sobre el punto de equilibrio se determina por la temperatura T.

**) Examinen lo expuesto valiéndose del problema 21 en la pág. 125.

Por muy extraño que parezca, para conseguirlo surgió la necesidad de examinar las propiedades de los sistemas físicos que existen (en el papel, claro está) en los espacios de dimensión fraccionaria (nuestro universo es tridimensional, el plano es un espacio bidimensional, y la línea, unidimensional ...).

Si la variación del parámetro η caracteriza la transición de fase de segundo género, éste se denomina, con frecuencia, parámetro del orden. En el caso de la transición «para» — «ferro», la causa de esta denominación es evidente: el momento magnético $\mathcal{M}$, es la medida de ordenación de los espines atómicos.

Citemos un ejemplo más de transición de fase de segundo género: la ordenación de la aleación CuZn. En la fig. 40 se muestra la red cristalina de esta aleación. A altas temperaturas los átomos de Cu y Zn están distribuidos desordenadamente: con la misma probabilidad (igual, como es lógico, a $^1/_2$) ocupan cualesquiera nudos de la red cristalina. Empezando desde cierta temperatura (ésta también se denomina temperatura de Curie), las probabilidades comienzan a diferenciarse de $\frac{1}{2}$, al principio muy poco, pero cuando la temperatura tiende a cero, las probabilidades también tienden a cero y a la unidad, respectivamente, entonces llega el orden completo.

Una observación más, la última en este párrafo. Por regla general, durante la transición de fase de segundo genero cambia la simetría del cuerpo. (El primero que prestó atención a este hecho fue L. D. Landau y, basándose en él, construyó la teoría fenomenológica para semejantes transiciones.) Efectivamente, al surgir el ferromagnetismo se destaca la dirección elegida en el sistema de momentos magnéticos atómicos, y al ordenarse la aleación varía el período de la red cristalina.

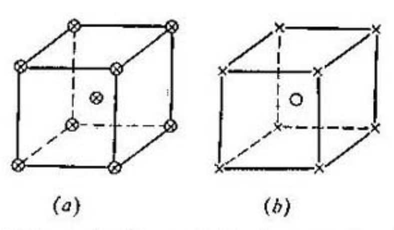


FIG. 40. *Disposición de los átomos de Zn (crucecitas) y Cu (circulitos) en una aleación que se ordena: a) para $T > T_{cr}$; b) para $T = 0$.*

Y he aquí lo interesante: en la cercanía inmediata de T_{cr} el parámetro del orden es todavía infinitamente pequeño, entre tanto, la simetría ya ha cambiado, ésta varía bruscamente, ya que el cuerpo posee una simetría u otra. La transición continua de una simetría a otra es imposible.

§ 4. ¿HACIA DÓNDE ESTÁ ORIENTADO EL MOMENTO MAGNÉTICO DEL FERROMAGNÉTICO? LA ENERGÍA DE LA ANISOTROPÍA MAGNÉTICA

La isotropía de la interacción de intercambio, de la que hablamos en el § 10 del capítulo 1, conduce a que la orientación del momento magnético del ferromagnético permanezca indeterminada. Claro, si situamos este último en el campo magnético H, para el momento magnético es ventajoso disponerse a lo largo de H. Pero, ¿no existirán causas intrínsecas, propias del mismo cuerpo, las cuales obliguen a que la densidad del momento magnético $\mathcal{M}_s$ se oriente en el cristal de un modo determinado? Claro que existen.

En primer término se trata de las fuerzas dipolo-dipolo que actúan entre los momentos magnéticos atómicos. Por cuanto la energía de la interacción dipolo-dipolo (1.35) depende de la orientación de los momentos magnéticos respecto a la recta que los une, resulta que en el cristal ferromagnético, donde estas rectas se fijan por la red cristalina, la energía de la interacción dipolo-dipolo dependerá de la orientación del vector $\mathcal{M}_s$.

En segundo término, los momentos magnéticos de espín de los átomos que forman el momento magnético total del ferromagnético interaccionan con las corrientes electrónicas. Estas últimas vienen condicionadas por el movimiento orbital y se hallan orientadas de un modo determinado en el espacio. Como resultado, unas orientaciones de los espines son más ventajosas desde el punto de vista energético que otras.

Con cada una de las dos interacciones descritas aquí puede vincularse la energía que depende de la orientación en el espacio de la densidad del momento magnético $\mathcal{M}_s$. Ésta se denomina *energía de la anisotropía.*

La energía de la anisotropía viene determinada por la interacción magnética dipolo-dipolo y la espín-órbita.

A menudo la energía de la anisotropía se divide en intraiónica e interiónica. La existencia de energía intraiónica se debe a que, bajo la influencia del campo eléctrico creado por los iones circundantes, la distribución de los electrones dentro del ion no es isótropa. En general, la existencia de la energía de la anisotropía es, en esencia, el resultado de la distribución no isótropa de los electrones en la red cristalina.

¿Por qué, examinando la aparición del momento magnético espontáneo en el ferromagnético, no teníamos en cuenta la energía de la anisotropía? Porque ésta es mucho menor que la de intercambio. Subrayando esta circunstancia se dice que la energía de intercambio es de origen *electrostático*, y la de la anisotropía, de origen *relativista*. Si la velocidad de la luz c fuese igual al infinito, la energía de la anisotropía equivaldría a cero. Este hecho se confirma con facilidad en el ejemplo de la energía magnética dipolo-dipolo. Ya la hemos evaluado (véase la pág. 56), viendo que es c^2/v^2 veces menor que la electrostática, mientras que la energía de intercambio, aunque puede diferenciarse de la electrostática, pero muy poco. Por cuanto la energía de la anisotropía es mucho menor que la de intercambio, la misma prácticamente no influye en la formación de la magnetización $\mathcal{M}_s$, y responde tan sólo por la orientación del vector $\mathcal{M}_s$.

No tenemos la posibilidad de deducir la expresión para la energía de la anisotropía $\mathcal{E}_a$. Éste es un problema arduo que hasta la fecha no ha sido solucionado del todo. Recurriremos a la descripción fenomenológica *) basada en la analogía entre la energía de la anisotropía y la energía del momento magnético en un campo magnético homogéneo externo. Precisamente ese campo orienta el momento magnético. Así, supongamos que en el cristal hay cierta dirección determinada por el vector unitario n a lo largo del cual es ventajoso que se halle orientado al momento magnético. Esta dirección lleva el nombre de eje elegido, o *eje de anisotropía*.

Entonces, siguiendo la analogía, se quisiera escribir

$$\mathcal{E}_a = -\beta \mathcal{M} n V, \quad \beta > 0.$$

Eliminamos el subíndice s empleado con $\mathcal{M}$.

---

*) Véase en la pág. 117 la definición del concepto «teoría fenomenológica».

9—1598

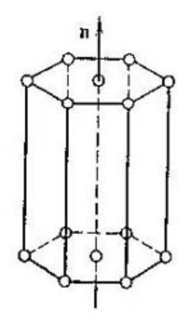
Quisiéramos, pero no ... no se puede. Y he aquí la causa de ello. La magnetización $\mathcal{M}$ es la suma vectorial de los dipolos magnéticos atómicos. Y esos dipolos cambian su dirección por la contraria al invertirse el tiempo, es decir, al cambiar $t \to -t$ (de esto hemos hablado en la pág. 21). Por lo tanto, también $\mathcal{M}$ cambia su dirección por la opuesta. La energía, al invertirse el tiempo, no puede cambiar su signo (en tales casos se dice: la energía es invariante con respecto a la inversión del tiempo *))... Por consiguiente, la expresión escrita no puede ser correcta. En la expresión para la energía, el vector $\mathcal{M}$ debe figurar con potencia par. Solamente en este caso la sustitución de t por $-t$ dejará invariante la energía. La expresión más simple que satisface este requerimiento es como sigue:

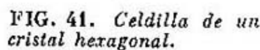
$$\mathcal{E}_a = -\frac{1}{2}\beta(\mathcal{M}n)^2 V, \quad \beta > 0. \tag{3.13}$$

Ésta será la expresión que utilizaremos. La tarea de la teoría microscópica consiste en calcular el factor β que es *la constante de anisotropía*. Señalemos (esto nos será útil más tarde) que la constante de anisotropía es adimensional. En distintos ferromagnéticos β tiene diferente valor, pero en la práctica, la constante de anisotropía β siempre es mucho menor que el parámetro de intercabmio α (véanse las fórmulas (3.10) y (3.11)). La causa la hemos mencionado ya: la insignificancia de la interacción relativista en comparación con la electrostática. La expresión (3.13) no es válida, ni mucho menos, para todos los cristales. Para los cristales uniaxiales es justa (por ejemplo, para los cristales con celdilla hexagonal; fig. 41), mientras que para los ferromagnéticos cúbicos es necesario utilizar una dependencia más complicada de $\mathcal{E}_a$ respecto a la dirección del vector $\mathcal{M}$.

De la fórmula (3.13) se infiere que para el vector $\mathcal{M}$ hay dos orientaciones más ventajosas: paralela y antiparalelamente a n. Esta indeterminación no puede eliminarse por las fuerzas internas del ferromagnético, acarreando dos consecuencias importantes (véase el § 5). Mientras tanto, situemos el ferromagnético en el campo magnético externo H, procurando determinar hacia dónde estará dirigido el vector $\mathcal{M}$ en este caso.

*) Esto se observa con especial evidencia en la expresión de la energía de la partícula libre $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}$. La velocidad v cambia el signo cuando $t \to -t$, y v^2, no.




FIG. 41. *Celdilla de un cristal hexagonal.*

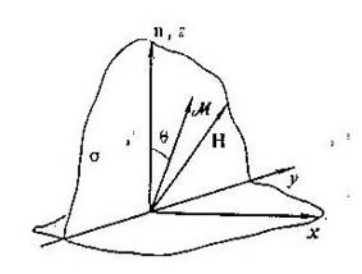


FIG. 42. *Cuando $H \neq 0$ el momento magnético se encuentra en el plano σ «tendido» en los vectores* ***n*** *y* ***H****. El momento magnético se dispone paralela o antiparalelamente al vector* ***n*** *para $H = 0$.*

Como siempre, hace falta partir de la condición del mínimo de energía $\mathscr{E}_a$. En este caso

$$\mathscr{E}_a = \left[-\frac{1}{2}\beta(\mathscr{M}n)^2 - \mathscr{M}H \right] V. \tag{3.14}$$

Los vectores ***n*** y ***H*** definen cierto plano σ (fig. 42). Al vector $\mathscr{M}$ no le es ventajoso abandonar este plano ya que semejante paso conducirá al aumento de la energía. Por esta razón es necesario hallar sólo un ángulo, a saber, el ángulo ϑ entre $\mathscr{M}$ y ***n***. Escribamos $\mathscr{E}_a$ en función de ϑ desarrollando la fórmula (3.14):

$$\mathscr{E}_a = -V\left(\frac{1}{2}\beta\mathscr{M}^2\cos^2\vartheta + H_x\mathscr{M}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \right.$$
$$\left. + H_z\mathscr{M}\cos\vartheta\right). \tag{3.14'}$$

Hemos hecho coincidir el eje z con el vector ***n***, y el eje x se encuentra en el plano σ y es perpendicular a ***n***.

La condición del mínimo $\mathscr{E}_a$ se anota de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\mathscr{E}_a}{\partial\vartheta} = V\mathscr{M}\left(\frac{1}{2}\beta\mathscr{M}\,\mathrm{sen}\,2\vartheta - H_x\cos\vartheta + H_z\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right) = 0,$$
$$\tag{3.15}$$
$$\frac{\partial^2\mathscr{E}_a}{\partial\vartheta^2} = V\mathscr{M}\left(\beta\mathscr{M}\cos 2\vartheta + H_x\,\mathrm{sen}\,\vartheta + H_z\cos\vartheta\right) > 0.$$

La condición de la positividad de la segunda derivada selecciona entre las soluciones de la ecuación (3.15) precisamente aquellas que corresponden al mínimo, y no al máximo. Después de sustituir son $\vartheta = \xi$ la ecuación (3.15) llega a ser una ecuación algebraica de cuarta potencia respecto a ξ:

$$(\beta \mathcal{M} \xi - H_x)^2 (1 - \xi^2) = H_z \xi^2. \qquad (3.16)$$

Del curso de álgebra se sabe que una ecuación con coeficientes reales puede tener tanto raíces reales como complejas conjugadas de dos en dos *). El número total de las raíces es igual al grado de la ecuación: en este caso son cuatro. De lo expuesto queda claro que la ecuación (3.16) tiene dos raíces reales o cuatro. ¡Naturalmente que nos interesan sólo las raíces reales! Por cuanto el segundo miembro de la ecuación es positivo, las raíces reales, por su valor absoluto, no superan la unidad. Por lo tanto, cada una de ellas define cierto valor del ángulo ϑ.

El carácter del punto extremo (el máximo o el mínimo) depende del signo de la segunda derivada. Sin embargo, la vía directa de comprobación es sumamente difícil. Pues para conseguirlo es necesario sustituir la raíz correspondiente en la ecuación para la segunda derivada, mientras tanto, es prácticamente imposible hallar la raíz de la ecuación (3.16) en una forma explícita (mírenla con atención: ¡es una ecuación completa —y no bicuadrada— de cuarto grado!). Utilizamos las consideraciones cualitativas que permiten figurarnos cómo va el asunto.

Cuando la ecuación (3.16) tiene cuatro raíces reales, dos de éstas corresponden al mínimo de la función $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$ (véase la fórmula (3.14')), y dos, al máximo. Se sobreentiende que los mínimos y los máximos se alternan. El mínimo más profundo corresponde al estado estable, y el menos profundo, al metaestable **). Cuando la ecuación (3.16) tiene dos raíces reales, la función $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$ tiene un mínimo y un máximo. La transición de un caso al otro se opera a costa de la variación de la magnitud y dirección del campo magnético H (es decir, de los valores de las proyecciones H_x y H_z), realizándose por medio de la confluencia de un máximo con el mínimo vecino. Está claro que en este caso el ferro-

*) Esto significa: si $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ es la raíz de la ecuación, entonces, también $\bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2$ es obligatoriamente la raíz de la misma ecuación (ξ_1 y ξ_2 son números reales).

**) Ya hemos expuesto razonamientos parecidos en el § 3 de este capítulo.

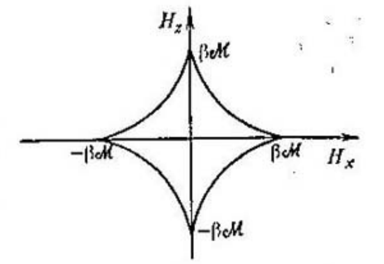


FIG. 43. Zona de estados metaestables del ferromagnético. Si el extremo del vector H se encuentra dentro de la astroide, el ferromagnético, además de estado estable, tiene también estado metaestable.

magnético pierde la posibilidad de encontrarse en estado metaestable.

Determinemos la zona de aquellos valores de las proyecciones del campo magnético H_x y H_z para los cuales el ferromagnético posee estado metaestable. Como vamos a cerciorarnos ahora esta zona está limitada por cierta curva en el plano H_x, H_z, cuya ecuación es fácil de obtener partiendo de las siguientes consideraciones: puesto que en los puntos de esta curva confluyen el mínimo y el máximo de la función $\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_a(\vartheta)$, la segunda derivada $\frac{d^2\mathscr{E}_a}{d\vartheta^2}$ en esta curva debe ser igual a cero. Con otras palabras, en la (3.15) la desigualdad debe sustituirse por la igualdad.

De este modo, tenemos dos ecuaciones que conviene escribir en la siguiente forma:

$$\frac{H_x}{\operatorname{sen}\vartheta} - \frac{H_z}{\cos\vartheta} = \beta\mathscr{M},$$

$$\frac{H_x}{\operatorname{sen}^3\vartheta} + \frac{H_z}{\cos^3\vartheta} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{H_x^{1/3}}{\operatorname{sen}\vartheta} + \frac{H_z^{1/3}}{\cos\vartheta} = 0.$$

Eliminando ϑ de estas ecuaciones *) obtendremos la ecuación de la curva buscada

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta\mathscr{M})^{2/3}. \qquad (3.17)$$

Esta curva se denomina astroide ya que por su forma recuerda una estrella («astron» significa en griego «estrella»). La astroide (fig. 43) divide el plano H_x, H_z en dos partes. ¿En cuál de ellas hay estados metaestables y en cuál no los hay? A esta pregunta es fácil contestar analizando campos

*) Para conseguirlo es necesario hallar $\operatorname{sen}\vartheta$ y $\cos\vartheta$ a partir de las ecuaciones anotadas y sustituir en la identidad $\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$.

magnéticos muy grandes (desde el punto de vista formal, para $H \to \infty$), cuando, simplemente, se puede despreciar la energía de la anisotropía. En este caso $\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_a(\vartheta)$ tiene un mínimo cuando el vector $\mathscr{M}$ es paralelo al vector H, es decir, cuando $\operatorname{tg} \vartheta = H_x/H_z$ son imposibles cualesquiera estados metaestables. Por lo tanto,

si H_x y H_z «se encuentran» fuera de la astroide, no hay estados metaestables, y si se encuentran dentro, sí hay estados metaestables.

De las consideraciones de simetría está claro que para $H = 0$, así como para $H_z = 0$, $H_x < \beta\mathscr{M}$, la curva $\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_a(\vartheta)$ *tiene dos mínimos de igual profundidad* *). El ferromagnético elige uno de los dos estados «guiándose» por las consideraciones cuya esencia expondremos en el siguiente párrafo.

§ 5. LOS DOMINIOS

Vamos a repetir la deducción a la que hemos llegado: para un campo magnético débil (es decir, para un campo perpendicular al eje de anisotropía y menor que $\beta\mathscr{M}$) aplicado «simétricamente», los estados estable y metaestable llegan a ser indistinguibles, mientras que las direcciones del vector de magnetización que les corresponden se vuelven igualmente ventajosas. En particular, si $H = 0$ el momento magnético tiene la misma ventaja al estar dirigido hacia cualquier lado por el eje de anisotropía, con la única condición de no desviarse de éste. ¿Cuál de estas dos direcciones se eligirá realmente? Se entiende bien que la elección está relacionada con cierto factor que todavía no hemos tomado en consideración.

Supongamos que a lo largo del eje de anisotropía se ha aplicado un campo magnético, incluso como se quiera débil. Por supuesto, la dirección a favor del campo es más ventajosa que la dirección contraria y, sin duda alguna, el momento magnético escogerá la primera. Y ahora, paulatinamente (con una lentitud infinita*)) eliminemos el campo. Los estados con momentos magnéticos orientados en dirección opuesta, a pesar de tener igual energía, están separados por

---

*) *Problema 22.* Comprueben esta afirmación.

*) Con una lentitud infinita, para no «sacudir» el imán elemental, ya que en este caso el mismo puede desimantarse (véase más adelante).

una barrera energética cuya magnitud se determina por la energía de la anisotropía. Después de haber desaparecido el campo, es posible que la magnetización no salve esta barrera. Entonces, el momento magnético del cuerpo conservará la dirección prefijada por el campo magnético. Así surge un estado en el que el ferromagnético posee magnetización espontánea, claro que a una temperatura inferior a la de Curie.

Sin embargo, sea como sea, este estado de magnetización conservado, a pesar de su ventaja energética incuestionable, es metaestable, y no estable. Hay un estado de energía más baja. En efecto, toda muestra está limitada. Encontrándose imantada, ésta sirve de fuente de campo magnético en el espacio circundante. Pero el campo magnético posee una energía positiva cuya densidad (es decir, la energía correspondiente a la unidad de volumen) es igual a

$$\mathscr{E}_H = \frac{H^2}{8\pi}. \qquad (3.18)$$

Esta expresión no la sacamos del «caletre». Deriva de las ecuaciones de Maxwell. Al calcular la energía del ferromagnético no tomamos en consideración, en general, la energía del campo magnético, mientras tanto, la energía total de este campo puede ser muy grande. Por ejemplo, en el caso de una placa imantada infinita (fig. 44, *a*) dicha energía es infinita debido a que el campo magnético se extiende hasta

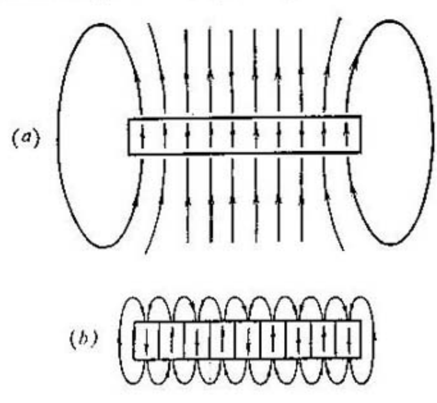


FIG. 44. Campo magnético alrededor de una placa ferromagnética: a) la placa está magnetizada uniformemente; b) la placa está dividida en dominios.

el infinito, con la particularidad de que su intensidad no disminuye con la distancia*), sino es igual a $4\pi_2\mathcal{M}$ (véase la pág. 74). Conviene sacar la conclusión de que el estado magnetizado que examinamos (y que consideramos como el más ventajoso desde el punto de vista energético), en realidad posee una energía muy grande. ¿Cómo, entonces, salir del apuro, cómo disminuir la energía total? A primera vista tenemos que renunciar a la orientación del momento magnético a lo largo del eje de anisotropía, situándolo perpendicularmente al eje. En este caso «perderemos» en energía de la anisotropía, mas, al parecer, disminuiremos la energía del campo magnético. Pero éste es un camino vicioso. Cada placa está limitada por todos los lados. De ella siempre «fluyen» líneas de fuerza magnéticas, llenando el espacio en su alrededor. La energía del campo magnético, como antes, será muy grande sin que lo compense la «pérdida» en energía de la anisotropía. El análisis demuestra que no se puede renunciar (en todo caso, por completo) a las ventajas que garantizan el carácter mínimo de la energía de la anisotropía. Sin embargo, puede aprovecharse el hecho de que existe equivalencia de ambas direcciones de magnetización a lo largo del eje de anisotropía. Dividamos la placa en iguales regiones alternantes. Supongamos que dentro de los límites de cada región el vector de magnetización tiene la misma dirección a lo largo del eje, pero que en las regiones vecinas las direcciones son opuestas, de modo que, en su conjunto, el cuerpo se encuentra desimantado. Estas regiones se llaman regiones de magnetización espontánea, o *dominios* (fig. 44, *b*). En la fig. se ve que las líneas de fuerza al salir de un dominio entran en el vecino. De este modo resulta que la «dispersión» de dichas líneas es muy insignificante, es decir, el campo magnético disminuye bastante rápidamente al alejarse de la superficie (tiene valor sustancial a distancias del orden de las dimensiones del dominio).

La energía del campo magnético $\mathcal{E}_H$ alrededor de la placa dividida en dominios es, como se entiende, mucho menor que la de la placa magnetizada. Según el orden de la magnitud

$$|\mathcal{E}_H^d \approx \mathcal{M}^2 Sd, \qquad (3.19)$$

*) En este caso, la palabra «infinita», referida a la placa, debe comprenderse de modo convencional: dos de sus dimensiones son mucho mayores que la tercera. En realidad, cuando la placa es finita, el campo magnético disminuye en una distancia grande en comparación con las dimensiones de la placa.

donde d es el espesor del dominio, y S, el área de la placa, igual a L^2. Por supuesto, no es una expresión exacta, ya que hemos omitido los factores numéricos, aunque éstos pueden resultar muy distantes de la unidad (por ejemplo, en la fórmula (3.18) el factor númerico es igual a $(8\pi)^{-1} \approx \approx 1/25$). Por esta razón, todas las fórmulas de este párrafo revisten carácter cualitativo.

La magnitud de la energía de la anisotropía magnética de la placa desimantada es igual que la de la imantada. Parece que al ferromagnético le es realmente vantajoso dividirse en dominios. De inmediato surge la pregunta: ¿en cuántos dominios debe dividirse una placa ferromagnética? Desde el punto de vista de la energía del campo magnético, cuanto mayor es el número de dominios, tanto mejor, puesto que con el aumento del número de dominios su tamaño disminuye, y las líneas de fuerza magnéticas se «aprietan» cada vez más densamente contra la placa: el campo disminuye con mayor rapidez al alejarse de la placa, y la energía del campo magnético decrece (véase (3.19)). ¿Qué es, entonces, lo que impide la «minimización» de los dominios? Aparentemente, la energía de la anisotropía magnética debe ser la misma para cualquier división. Por otra parte, la experiencia demuestra con toda certidumbre que los dominios tienen dimensiones macroscópicas completamente determinadas, dependientes de la forma y el tamaño de la muestra.

Con el fin de atar los cabos es necesario prestar mayor atención a la frontera entre dos dominios. Sin darnos el trabajo de recapacitar, disponíamos los momentos magnéticos en los dominios vecinos unos al encuentro de otros, olvidando que, desde el punto de vista de la interacción de intercambio (3.8′), «cometemos un delito», ya que, de acuerdo con esta interacción, la energía de intercambio es mínima cuando los espines vecinos son paralelos, y máxima(¡!), cuando son antiparalelos. Además, la interacción de intercambio es la primordial entre las interacciones...

De este modo queda claro que la vecinidad de los espines antiparalelos es desventajosa a ciencia cierta. El análisis demuestra que la transición de una dirección del momento magnético a la dirección opuesta se realiza paulatinamente*):

*) El análisis se basa en el cálculo de una distribución tal de la magnetización, la cual posea una energía mínima, pero a condición de que a lo lejos de la frontera los momentos magnéticos estén dirigidos en sentidos opuestos.

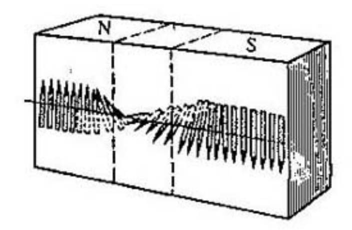


FIG. 45. *Pared de dominio. El momento magnético $\mathcal{M}$ gira permaneciendo paralelo al plano que separa los dominios. Lejos de la pared de dominio los momentos magnéticos están dispuestos a lo largo del eje de anisotropía, de modo antiparalelo unos respecto a otros.*

a una distancia del orden de

$$\delta = a\,(\Lambda/\mu\beta\mathcal{M})^{1/2}, \qquad (3.20)$$

donde a es la distancia interatómica, el vector de magnetización gira a 180° en el plano paralelo a la frontera entre los dominios (fig. 45). En lugar de una frontera nítida (geométrica) entre los dominios se forma, en este caso, una capa de transición de espesor finito, una especie de pared. Precisamente así se dice: *pared de dominio*. Su estructura es tal que permite pasar de un dominio a otro con la menor pérdida de energía (cuanto mayor es la energía de intercambio, tanto más gruesa es la pared de dominio; cuanto mayor es la energía de la anisotropía, tanto más delgada es la pared). El conocimiento de la distribución del momento magnético da la posibilidad de calcular la energía relacionada con la aparición de una pared de dominio. Ésta es aproximadamente igual a*) $\Delta = \mathcal{M}^2\delta$ por 1 cm² de pared. Una vez calculada esa energía, podemos olvidar la estructura de la pared de dominio considerándola otra vez como una frontera nítida cuya existencia, sin embargo, está relacionada con la energía complementaria Δ. Más adelante examinaremos en cuáles casos tal enfoque es correcto.

Ahora se ve qué es lo que impide el fraccionamiento del ferromagnético en dominios demasiado pequeños: la aparición de nuevos dominios aumenta la energía de sus fronteras y limita el fraccionamiento. Con el fin de calcular la magnitud de un dominio aislado d, escribamos la energía de la placa ferromagnética desmagnetizada. Por cuanto el número de paredes de dominio es igual a L/d, y el área de la frontera entre los dominios es lL, siendo l el espesor de la

*) Claro está que aquí también se ha omitido el factor numérico.

placa (véase la fig. 44, *b*), resulta que la energía (contada, por supuesto, a partir de la energía de intercambio) es igual a

$$\mathscr{E} = S\left(d + \delta\,\frac{l}{d}\right)\mathscr{M}^2. \tag{3.21}$$

Como siempre, las dimensiones del dominio se hallan de la condición del mínimo, en este caso de la expresión (3.21). La energía $\mathscr{E}$ es mínima si $d = \sqrt{\delta l}$.

Este importante resultado lo obtuvieron Ya. I. Frénkel, L. D. Landau y E. M. Lifshits. El concepto de dominios es esencial para comprender la naturaleza del ferromagnetismo: de acuerdo con los datos experimentales

en estado fundamental el ferromagnético de dimensiones limitadas resulta desmagnetizado debido a que se halla dividido en dominios.

Las dimensiones del dominio dependen de las características del ferromagnético (éstas forman parte del parámetro δ); dichas dimensiones crecen con el aumento del tamaño de la muestra, proporcionalmente a la raíz cuadrada del tamaño mínimo de la placa.

Al lector atento, todo el curso de nuestros razonamientos le debe parecer absolutamente carente de lógica. Cuando establecíamos hacia dónde puede estar dirigido el momento magnético (el comienzo del párrafo), considerábamos que el ferromagnético es homogéneo: la magnetización no depende de las coordenadas; después resultó que alrededor de la frontera entre los dominios el momento magnético no es homogéneo; dentro de varios renglones otra vez «olvidamos» esta circunstancia, lo cual se reflejó al escribir la fórmula (3.20). Una cosa más: cuando deducíamos la ecuación de Curie—Weiss (§ 2 de este capítulo), a ciencia cierta no tomábamos en consideración la posible heterogeneidad de la magnetización. ¿Qué derecho tenemos de tener en cuenta o de no tener en cuenta la heterogeneidad? ¿No estaremos mostrando una arbitrariedad, al parecer, completamente intolerable en la ciencia? ¡Claro que no! Comencemos por la fundamentación de la posibilidad de sustituir la pared de dominio por una frontera geométrica. Por lo visto, todos reconocerán que esto se puede hacer si el espesor de la pared de dominio δ es mucho menor que las dimensiones del dominio d, es decir, cuando $d \gg \delta$, de donde se deduce que todo el análisis es válido para placas bastante gruesas ($l \gg \delta$).

En efecto, para los ferromagnéticos de dimensiones bastante pequeñas (todas las dimensiones de la muestra $\sim\delta$), la formación de dominios es absolutamente desventajosa. Tales partículas ferromagnéticas existen y no se desmagnetizan, representando un solo dominio.

Ahora esclarecemos qué es lo que nos da derecho a apoyarse en los resultados obtenidos durante la resolución de la ecuación de Curie—Weiss. Las regiones de mayor heterogeneidad en un ferromagnético desmagnetizado son las paredes de dominio. El grado de heterogeneidad se caracteriza por el espesor de la pared de dominio δ. Ahora bien, $\delta \gg a$, o sea, desde el punto de vista de las escalas atómicas, incluso cerca de la frontera de los dominios, el ferromagnético es homogéneo*). De este modo, el enfoque que utilizamos es justo. El mismo tiene derecho a existir si se cumplen las desigualdades fuertes

$$l \gg \delta \gg a. \qquad (3.22)$$

Subrayemos que la segunda igualdad se cumple debido a que la energía de intercambio es mucho mayor que la de la anisotropía, hecho que hemos discutido ya.

La formación de la estructura periódica de dominios puede servir de ejemplo de un fenómeno bastante general, la llamada *alteración espontánea de la simetría*: a un ferromagnético homogéneo altamente simétrico le es ventajoso, desde el punto de vista energético, rebajar su simetría transformándose en una estructura periódica.

La alteración espontánea de la simetría ya la hemos observado: al pasar del estado paramagnético al ferromagnético se pierde (se altera) la isotropía propia de cada punto del paramagnético, lo cual sucede a costa de la formación de un momento magnético macroscópico (pues éste se halla orientado hacia algún lado).

El ejemplo examinado de la estructura de dominios en una placa cortada perpendicularmente al eje de anisotropía, representa, por supuesto, un caso especial. También ocurre que las paredes de dominio tienen otra estructura. Suele suceder, además (¡y como regla!) que la forma de los dominios no es tan simple como la hemos descrito (por ejemplo, en la fig. 46, *a* se muestra la estructura de dominios en una pelí-

---

*) Cabe recordar que la interacción de intercambio disminuye muy rápidamente con la distancia; en esencia, ella enlaza tan sólo los átomos vecinos, en tanto que todos los átomos del ferromagnético se relacionan «por relevo» (véase la fórmula (3.8')).

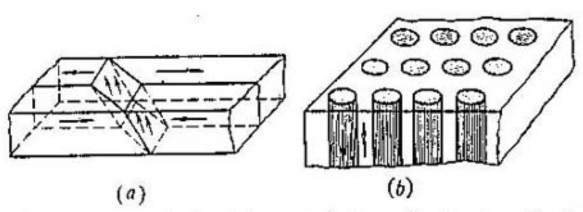


FIG. 46. *Estructuras de dominio «complejas»: a) estructura de dominio en una película de hierro; b) dominios cilíndricos. Las flechas designan la dirección de la magnetización lejos de la pared de dominio.*

cula de hierro y, como se ve, no es tan sencilla, ni mucho menos). En algunos ferromagnéticos aparecen dominios cilíndricos (fig. 46, *b*) que han encontrado aplicación en la técnica en calidad de elementos de memoria de los ordenadores.

Pero cualquiera que sea la constitución de las estructuras de dominios, la deducción principal sigue en pie: al momento magnético total de un ferromagnético limitado, pero bastante grande, le es ventajoso, desde el punto de vista energético, ser igual a cero.

¿Por qué, entonces, existen imanes permanentes? Para contestar a esta pregunta conviene ponerse al tanto de cómo se desarrolla el proceso de imantación y desimantación del ferromagnético.

§ 6. CURVA TÉCNICA DE MAGNETIZACIÓN

Se denomina curva de magnetización la dependencia del momento magnético del cuerpo respecto al campo magnético aplicado (externo). El calificativo «técnica» lo explicaremos más tarde.

La variación del momento magnético del paramagnético (o bien, del ferromagnético cuando se trata de una temperatura superior a la de Curie) en función del campo magnético es lineal hasta alcanzar campos muy grandes. La saturación, o sea, la aproximación a la magnetización máxima posible, comienza a una temperatura muy baja o cuando hay un campo magnético muy grande, en concordancia con la condición $\mu H \gg kT$ (cap. 2, § 2).

El aspecto de la curva de magnetización del ferromagnético es completamente distinto. Ésta se muestra en la fig. 47. Como se deduce del dibujo, para $H = 0$ la magnetización $\mathcal{M}$ también es igual a cero. Eso corresponde a lo expuesto en el párrafo anterior: en ausencia del campo apli-

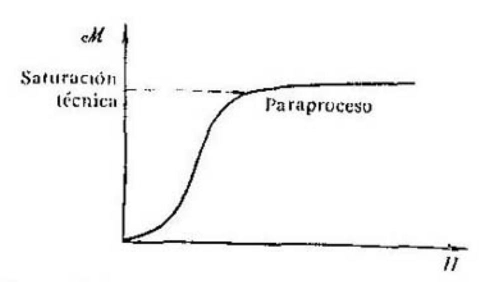


FIG. 47. *Curva fundamental de magnetización.*

cado el ferromagnético permanece desimantado. La curva de magnetización que parte del origen de coordenadas se denomina *curva fundamental*. Con el aumento del campo crece la magnetización, al principio poco a poco, pero luego bruscamente: en un intervalo relativamente estrecho, la misma aumenta decenas de veces. Después su crecimiento otra vez se hace más lento y comienza la llamada *saturación técnica*. La magnetización hasta la saturación magnética se denomina *magnetización técnica*, y el tramo correspondiente de la curva lleva el nombre de *curva técnica de magnetización**).

Si después de haber alcanzado la saturación técnica seguimos aumentando el campo magnético, la magnetización variará con lentitud, aumentando casi linealmente con el campo. Esta variación (última) de la magnetización junto con el campo se denomina *paraproceso*, subrayando la analogía de la magnetización del paramagnético con la dependencia lineal del campo.

Como es lógico, la diferencia entre la curva técnica de magnetización del ferromagnético y la curva correspondiente para el paramagnético, se debe al hecho de que en el ferromagnético, incluso cuando $H = 0$, existen regiones macroscópicas imantadas genuinas (dominios), mientras que el papel del campo magnético externo se reduce a la alineación de sus momentos magnéticos**). Como hemos señalado, en

*) Es necesario tener en cuenta que las características numéricas de la curva fundamental varían no sólo de un ferromagnético a otro, sino también (en cierta medida) de una muestra a otra. Por regla general, en este caso se conserva el carácter de la curva.

**) La alineación de los momentos magnéticos de los dominios significa, por supuesto, la destrucción (liquidación) de la estructura de dominios, ya que estos últimos se diferencian tan sólo por la orientación de los momentos magnéticos.

el paramagnético, el campo magnético alinea los momentos magnéticos *microscópicos* de los átomos.

Para dar una explicación cualitativa de la magnetización técnica volvemos a examinar la placa de un ferromagnético uniaxial (véase la fig. 44). Sin embargo, ahora supongamos que el campo magnético externo está aplicado a esta placa formando cierto ángulo con el eje de anisotropía. El campo altera la equivalencia de las dos orientaciones a lo largo del eje, convirtiendo en más ventajosa aquélla que forma con el campo un ángulo agudo. Con otras palabras, a los dominios con momento magnético dirigido a favor del campo les conviene aumentar, y a los que tienen los momentos dirigidos en contra del campo les conviene disminuir. ¿De qué forma, entonces, tiene lugar el aumento de unos dominios y la reducción de otros?

A raíz de que en las paredes de los dominios la dirección de la magnetización varía continuamente de un punto a otro (véase la fig. 45), el momento magnético en la pared —por muy pequeño que sea el campo— girará: en un campo pequeño, a un ángulo pequeño. Dicha circunstancia provocará la variación de la distribución de la magnetización y, por tanto, el desplazamiento de la frontera de los dominios (fig. 48), y como resultado, aparecerá la magnetización del cuerpo.

El incremento sucesivo del campo magnético conduce al desplazamiento ulterior de las fronteras de los dominios y al crecimiento continuo de la magnetización. Subrayemos que el tramo lineal en la curva fundamental (cuando $H \to 0$) es el resultado de la existencia de paredes de dominio de espesor finito. Si la frontera entre los dominios hubiera sido infinitamente delgada, entonces, para crear una magnetización finita habría que variar la orientación de los momen-

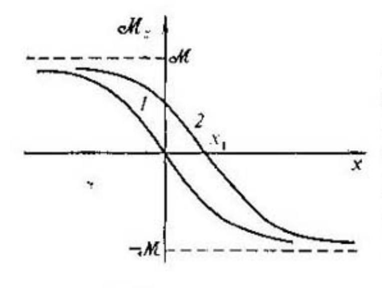


FIG. 48. *Variación de la posición de la frontera de dominio por acción del campo magnético: la curva 1 es la proyección del momento magnético sobre el eje de anisotropía, en función de la coordenada; $x = 0$ es la frontera de los dominios ($H = 0$); la curva 2, lo mismo para $H \neq 0$; la frontera de los dominios se desplazó a la magnitud x_1.*

tos magnéticos a la vez en todos los dominios «desventajosos», lo cual requeriría un campo considerable.

Con cierto valor del campo magnético los dominios «desventajosos» casi desaparecen, y el crecimiento de la magnetización disminuye. Así pues, la región de los campos donde tiene lugar la variación más rápida de la magnetización corresponde al movimiento de las fronteras de los dominios. El aumento sucesivo de la magnetización se halla relacionado con el giro del momento magnético total en dirección del campo magnético. Tal giro se hace dificultoso (en comparación con el de los momentos magnéticos en las paredes de los dominios) y, como resultado, la relación $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$ en esta región de los campos tiene un declive más suave. Por fin, todos los momentos magnéticos de los dominios se alinearon en dirección del campo, el ferromagnético es macroscópicamente homogéneo y su momento magnético espontáneo ocupó la posición más ventajosa desde el punto de vista energético: comenzó la saturación técnica. El crecimiento ulterior de la magnetización con el campo (paraproceso) es el resultado de la lucha del campo magnético contra el movimiento térmico de los espines atómicos, lucha en la que el campo magnético interviene como aliado de la interacción de intercambio, y su adversario común es la propensión al desorden que existe a cualquier temperatura finita.

Analicemos ahora el proceso inverso a la imantación, o sea, la desimantación. Supongamos que disminuye el campo magnético que imantó el ferromagnético hasta la saturación técnica. Se sobreentiende que junto con el campo también disminuirá la magnetización. ¿Ha de representarse, en este caso, la disminución de la magnetización (desimantación), por medio de la misma curva que representa la imantación (véase la fig. 47)? No es obligatorio. En un ferromagnético ideal (sin impurezas, alteraciones de la red, dislocaciones, etc., pues sólo estudiamos tales objetos) todo depende de dónde caiga (dentro o fuera de la astroide mostrada en la fig. 43) el punto que representa el campo magnético. Si ese punto se encuentra fuera de la astroide (donde no hay estados metaestables), entonces, el punto en el plano H, $\mathcal{M}$ se moverá (por lo menos, al principio) a lo largo de la curva fundamental de magnetización. En cambio, si el punto que representa el campo magnético de saturación cae dentro de la astroide (donde existen estados metaestables), entonces, al disminuir el campo, la variación de la magnetización ocurrirá conforme a la curva de los estados metaestables.

Cada punto en esta curva corresponde a una magnetización mayor que en la curva fundamental. Cuando el campo magnético se reduzca a cero, la magnetización no se anulará, debido a que para la desimantación, es decir, para la división del cuerpo en dominios, es necesario superar la barrera energética (véanse los §§ 4 y 5 de este capítulo). Como ya hemos aclarado, el estado de magnetización del ferromagnético en ausencia del campo externo es metaestable, pero, con frecuencia, puede conservarse durante un tiempo indefinidamente largo. Este hecho lo conocen desde la infancia todos los que jugaron con un imán permanente.

La magnetización del ferromagnético en ausencia del campo externo se denomina *magnetización remanente*. Si se quiere «eliminar» la magnetización remanente, o sea, desimantar por fuerza la muestra, es indispensable aplicar un campo magnético bastante grande y dirigido en contra del campo de imantación. La magnitud de la intensidad de este campo lleva el nombre de *fuerza coercitiva*. En diferentes ferromagnéticos la fuerza coercitiva es distinta: de décimas partes de oerstedio a miles de oerstedios. Los materiales de gran fuerza coercitiva se denominan materiales *magnéticamente duros*, y los de fuerza coercitiva pequeña, materiales *magnéticamente blandos*. Tanto unos como los otros encuentran su aplicación en diferentes esferas de la técnica.

Al seguir aumentando el campo en dirección opuesta a la del campo de imantación primaria, el ferromagnético puede imantarse otra vez hasta la saturación técnica. La disminución del campo de dirección opuesta, existiendo estados metaestables, llevará a la variación de la magnetización a lo largo de la curva situada debajo de la fundamental. De nuevo aparecerá la magnetización remanente para cuya anulación otra vez es necesario aplicar un campo de igual fuerza coercitiva, pero esta vez orientado a lo largo de la dirección inicial ... Aquí es completamente oportuno decir, etc., ya

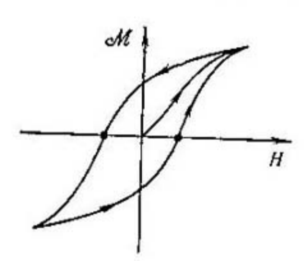


FIG. 49. *Ciclo de histéresis.*

que el aumento sucesivo del campo conducirá a la imantación hasta la saturación técnica.

Los procesos descritos de imantación y reimantación se representan en la fig. 49. La particularidad más característica de esta curva es el cambio irreversible de la magnetización con el campo: la imantación y la desimantación del ferromagnético se producen con arreglo a curvas diferentes. Dicha irreversibilidad lleva el nombre de *histéresis magnética*, y la curva cerrada en el dibujo se denomina *bucle (ciclo) de histéresis*. Recalquemos:

La histéresis es una de las manifestaciones de la existencia de los estados metaestables.

El calificativo «técnico» (saturación técnica, curva técnica de magnetización) no sólo destaca el hecho de la importancia técnica de la curva de magnetización de los magnéticos reales, sino también la dependencia entre el proceso de imantación y la técnica de fabricación de la muestra. El hecho es que las características numéricas de la curva técnica de magnetización, del ciclo de histéresis y de la fuerza coercitiva dependen sustancialmente del estado de la muestra y de su elaboración al fabricarla. Esto se utiliza en la técnica para crear imanes con propiedades necesarias. La causa física de la sensibilidad de la curva técnica de magnetización al estado de la muestra reside en la dependencia de la constante de anisotropía β respecto a la estructura de la red cristalina. El aumento de β en las regiones defectuosas conduce a que el momento magnético se «agarra» a éstas y se requiere un campo relativamente grande para hacerlo «cambiar» de orientación. El análisis de la curva técnica de magnetización y la elaboración de las recomendaciones para obtener las propiedades magnéticas necesarias es un capítulo importante de la física aplicada de fenómenos magnéticos.

§ 7. ONDAS DE ESPÍN

Hablando en rigor, los dos párrafos anteriores son una digresión que nos desvía de nuestro tema principal, por cuanto no están dedicados a la *naturaleza* del ferromagnetismo, sino a las propiedades de muestras reales de dimensiones finitas. En el presente párrafo retornamos a la descripción

de la naturaleza del estado ferromagnético. Aún debemos conocer cómo el momento magnético espontáneo del ferromagnético a bajas temperaturas —cerca del cero absoluto— depende de la temperatura. Como hemos señalado, la fórmula (3.5) no concuerda con los resultados de las mediciones del momento magnético en función de la temperatura.

Para esclarecer la variación de las magnitudes físicas en función de la temperatura es necesario saber cómo se mueven las partículas atómicas que constituyen el cuerpo. Ya hemos tenido la posibilidad de cerciorarnos de ello al examinar las propiedades magnéticas de los metales (cap. 2, §§ 4 y 5). La física estadística relaciona el movimiento de las partículas atómicas aisladas con las propiedades macroscópicas de los cuerpos. Cuando se trata de un gas está claro el significado de las palabras «partícula atómica aislada». ¿Pero qué significan esas palabras con arreglo a un sólido que se diferencia del gas precisamente por el hecho de que no tiene partículas atómicas *aisladas* debido a que éstas interaccionan unas con otras? Como veremos, en los cristales, el papel de partículas atómicas aisladas lo desempeñan las *cuasipartículas*, de las cuales hablaremos más adelante.

Hemos pronunciado muchas palabras incomprensibles: en el título del párrafo, ondas de espín; en el texto, cuasipartículas; y ahora añadiremos una combinación más de palabras poco comprensible: espectro energético de un sistema físico. En este párrafo nos referiremos al espectro energético de un ferromagnético. Esperamos que un poco más tarde se dilucidará lo que significa todo ello.

Cabe recordar la observación hecha con motivo del modelo de Curie—Weiss (pág. 120): hablando con propiedad, la energía del ferromagnético no se determina unívocamente por la magnetización. Solamente con la plena ordenación magnética, cuando todos los imanes atómicos elementales son paralelos unos a otros, la energía se expresa por medio del momento magnético total del cuerpo. Precisamente esta circunstancia dio la posibilidad de relacionar la constante α de la teoría fenomenológica, con la integral de intercambio A (véase la fórmula 3.11). La causa de la relación unívoca estriba en que la ordenación completa puede crearse por un solo método.

Teniendo en cuenta lo que sigue, nos conviene hablar no del momento magnético, sino del espín del ferromagnético.

De este modo, en el estado fundamental del ferromagnético los espines de todos los átomos son «paralelos» entre sí.

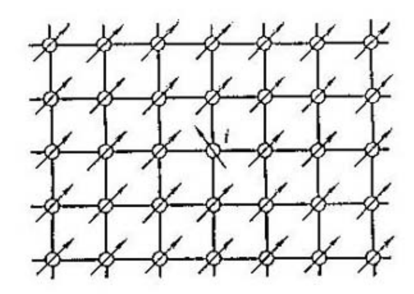


FIG. 50. *El espín del i-ésimo átomo está desviado de la «dirección» común.*

Su «dirección»*) común se prefija, por ejemplo, por el eje de anisotropía a lo largo del cual está aplicado el campo magnético. Toda desviación del espín con respecto a dicha dirección va acompañada de aumento de energía. Supongamos que el átomo de espín desviado se encuentra en el nudo de la red cristalina de número i (fig. 50). Entonces, aparentemente, la energía del ferromagnético se diferenciará de la del estado fundamental (3.9) a costa de la variación de la magnitud de interacción del i-ésimo átomo con sus vecinos más próximos. Sin embargo, tal representación patente resulta errónea debido a que no toma en consideración la naturaleza cuántica del espín. Claro está que puede existir un estado en el que el espín del i-ésimo átomo resulte desviado. Pero para nosotros eso es poco: deseamos que sea *estacionario, que posea una energía determinada.* Y esto es ya un requerimiento desmesurado. Como ya hemos señalado (cap. 1, § 4), en la mecánica cuántica no todas las magnitudes físicas, ni mucho menos, pueden tener a la vez valores determinados. En particular, para el ferromagnético, es decir, para el sistema de espines cuya conducta se describe por el hamiltoniano (3.8′), la energía del sistema y la proyección del espín del i-ésimo átomo (si la misma se diferencia de las proyecciones de los espines de los demás átomos) no pueden tener a la vez determinados valores. Esta afirmación es tan importante para la comprensión del material ulterior que la ilustraremos por medio de un sistema ele-

*) Una vez más prestemos atención al hecho de que la «dirección» del espín (y, en general, del momento cuántico) es un método cómodo para designar los estados con un valor dado de la proyección del espín.

mental de espín integrado por dos electrones (espín = 1/2) relacionados por la interacción de intercambio (véase la fórmula (1.39)).

De la tabla II en la pág. 50 se deduce que la magnitud del producto escalar $s_1 s_2$ (y, por consiguiente, también la energía) viene determinada por el valor del espín total del sistema de dos electrones, con la particularidad de que entre cuatro estados estacionarios tan sólo en dos la proyección de cada espín está determinada por separado. Son los estados con $S = 1$, y $S_z = +1$ y $S_z = -1$. En dichos estados cada uno de los electrones tiene una proyección determinada del espín: cuando $S_z = 1$, ambos electrones tienen $s_z = +1/2$, y cuando $S_z = -1$, ambos tienen $s_z = -1/2$. En los dos estados restantes ($S = 0$ y $S = 1$ para $S_z = 0$) las proyecciones $s_z = 1/2$ y $s_z = -1/2$ para cada electrón están «confundidas», o sea, en estos estados cada uno de los electrones no tiene una proyección determinada del espín.

Para un ferromagnético, el análogo de los estados con $S = 1$ y $S_z = \pm 1$ son los estados con $S = Ns$ y $S_z = \pm Ns$, o sea, estados con energía de intercambio mínima (para $A > 0$, claro está) y, al mismo tiempo, los estados con un valor determinado de la proyección del espín de cada átomo (para todo i $s_{iz} = +s$, si $S_z = Ns$, y $s_{iz} = -s$, si $S_z = -Ns$). En los demás estados estacionarios (al igual que en el caso de dos electrones) las proyecciones de los espines de los átomos aislados no tienen valores determinados. La tabla II nos sugiere, además, de qué modo conviene caracterizar los estados estacionarios de los sistemas de espines relacionados por la interacción de intercambio (fíjense que el hamiltoniano (3.8′) cuyas propiedades estudiamos es la generalización del hamiltoniano (1.39)). Conforme a la tabla, en todos los cuatro estados estacionarios la proyección del espín total tiene un valor determinado. Esta propiedad de los estados estacionarios se conserva también para el caso que nos interesa, o sea, para el sistema de los espines atómicos descritos por el hamiltoniano (3.8′). Por esta razón, aunque en un nudo dado no hay estado estacionario con espín «desviado»

existen estados estacionarios con un valor determinado de la proyección S_z del espín total de todo el ferromagnético en el eje de anisotropía.

Por intuición queda claro que a bajas temperaturas que nos interesan son esenciales los estados próximos al funda-

mental. Analicemos un estado estacionario con $S_z = Ns - 1$, es decir, con una disminución mínima de la proyección del espín total. Sería conveniente realizar tal estado cambiando la proyección del espín de un átomo en la unidad: $s \to \to s - 1$. Pero, como hemos visto, la mecánica cuántica no lo tolera. Por consiguiente, el espín desviado (el espín con la proyección $s - 1$) debe pertenecer a todo el cristal. Con frecuencia se dice que ésto «cunde» por toda la red cristalina. De una forma patente esta situación puede ser representada como la transición del espín desviado de un átomo a otro gracias a la interacción de intercambio. En el lenguaje cuántico esto significa que la función Ψ del estado estacionario con $S_z = Ns - 1$ tiene el aspecto de onda y describe la desviación consecutiva de los espines de los átomos en los nudos de la red cristalina. Esta onda recuerda mucho la de de Broglie, de la cual se habló en relación con las propiedades de las partículas libres (cap. 1, § 4), y que lleva el nombre de *onda de espín* (de aquí también proviene el título del párrafo).

Al igual que la onda de de Broglie, la de espín se caracteriza por el vector de onda k con el cual, análogamente a la partícula libre, se puede relacionar el impulso

$$p = \hbar k. \tag{3.23}$$

La onda de espín, como todo estado estacionario, se caracteriza por la energía. Esta última suele calcularse a partir de la energía del estado fundamental. Para una partícula libre la energía es $\varepsilon = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$, donde m es la masa de la partícula. La energía de la onda de espín ε también depende del vector de onda. Si el ferromagnético representa una red cúbica simple, entonces

$$\varepsilon(k) = 2A\,(3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a), \tag{3.24}$$

donde a es la constante de la red, o sea, la distancia entre los átomos vecinos más próximos, y k_x, k_y y k_z, las proyecciones del vector de onda k en las aristas de la celdilla cúbica del cristal.

Hemos comparado la onda de espín y la partícula no sólo por consideraciones pedagógicas. Es verdad que se parecen mucho: tanto la partícula como la onda de espín tienen características dinámicas iguales, a saber, el impulso p y la energía ε que es función de este último. Subrayemos que para la onda, la referida circunstancia deriva de la mecáni-

ca cuántica*); la energía de la onda clásica depende de la amplitud y, por lo tanto, puede ser tan pequeña como se quiera. La semejanza entre la onda de espín cuántica y la partícula es tan grande que se «introduce» una partícula especial de impulso $p = \hbar k$ y energía $\varepsilon = \varepsilon(p)$ sujeta a la fórmula (3.24). Esta partícula se denomina *magnón*. Lean, por favor, otra vez todo acerca de las relaciones de Broglie (pág. 29). La «introducción» del magnón significa la lectura de las fórmulas (1.19) y (1.20) de derecha a izquierda, es decir, *el reconocimiento de las propiedades corpusculares de la onda de espín*.

El magnón no es una partícula del todo común. No se debe olvidar que no es sino la excitación elemental de los momentos magnéticos ordenados del ferromagnético, o sea, la onda de desviaciones del espín. Si el ferromagnético pasa al estado fundamental, el magnón desaparecerá. Las partículas ordinarias (electrones, protones, átomos ...) no desaparecen y no surgen de la nada.

Con el fin de subrayar la especificidad de las partículas que se introducen para describir las excitaciones elementales de los cuerpos macroscópicos, las mismas recibieron el nombre de *cuasipartículas*.

Varias veces ya hemos subrayado el hecho de que la onda de espín es una excitación elemental. ¿En qué sentido la onda de las desviaciones de los espines es elemental si ella «afecta» todos los átomos del ferromagnético? Únicamente en el sentido y sólo en el sentido de que dicha excitación no puede descomponerse en excitaciones más simples, puesto que no existen estados estacionarios más simples del ferromagnético con una proyección del espín igual a $Ns - 1$.

De tres términos incomprensibles, introducidos al principio de este párrafo, hemos explicado ya dos (la onda de espín y la cuasipartícula). Sólo nos queda el tercero, el espectro energético. Ahora nos referiremos al espectro energético del ferromagnético.

De este modo, con una variación mínima posible del espín del ferromagnético y, por consiguiente, también de su momento magnético, la energía del ferromagnético cambia en la magnitud $\varepsilon(k)$ que depende del vector de onda k. Como ya hemos dicho, el hecho de prefijar el momento magnético del cristal no determina unívocamente su energía. Existe

*) En esencia, éste es el resultado de la cuantificación espacial de un espín cuya proyección sólo puede variar de forma discontinua (véase el § 5, la fórmula (1.23)).

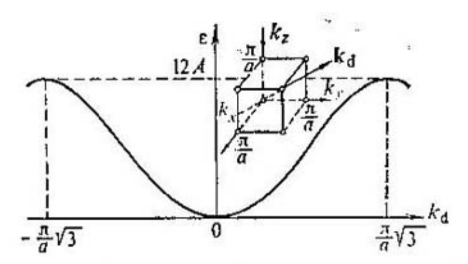


FIG. 51. *Variación de la energía del magnón en función de la proyección k_d del vector de onda k sobre la diagonal espacial del cubo.*

toda una *banda* de valores posibles (permitidos) de energía, correspondientes a un momento magnético igual a $(Ns - 1)\, 2\mu$ (para $J = s$ $g = 2$, mientras que $g\mu$ es la variación mínima de la proyección del momento magnético de un átomo aislado). De acuerdo con la fórmula (3.24), el ancho de esta banda es igual a $12\, A$, puesto que $\varepsilon(k) = 0$ para $ak_x = ak_y = ak_z = 0$, y $\varepsilon(k) = 12\, A$ cuando $ak_x = ak_y = ak_z = \pm\pi$ (fig. 51). Hay que subrayar que la banda de los valores permitidos de energía linda directamente (sin ranura) con la energía del estado fundamental E_s prefijada por la fórmula (3.9). El surgimiento de la banda está condicionada por la energía de intercambio. Esto se ve claramente porque su ancho se reduce a cero cuando $A \to 0$ (véase la fórmula (3.24)).

Olvidemos por un instante la interacción de intercambio. Supongamos que el cristal consta de N átomos idénticos que no se hallan en interacción, además, todos ellos se encuentran en estado fundamental. Cada uno tiene su sistema de niveles, aunque, por cierto, todos esos sistemas son semejantes. Analicemos el estado de excitación mínimo de nuestro «cristal». Está claro que para conseguirlo es necesario pasar uno de los átomos al estado de excitación más bajo. Indistintamente que átomo, todos son idénticos. A una misma energía de excitación le corresponden N (por el número de átomos) estados diferentes, debido a que el estado se determina no sólo por la energía, sino también, en un caso dado, por el átomo que resulte excitado. Del nivel de energía al que corresponde más de un estado se dice que es *degenerado**), y en este caso es N veces degenerado, además, N es un

*) Por desgracia, la palabra «degeneración» tiene en la física varias acepciones (compárese con el término «gas degenerado» empleado en la pág. 95).

número fantásticamente grande (~10^{23} por 1 cm³). La interacción de intercambio «quita» la degeneración, es decir, en lugar de un nivel degenerado aparecen N niveles dispuestos en una banda de 12 A de ancho. Con la tendencia formal de N al infinito, las distancias entre los niveles tienden a cero, y los niveles permitidos de energía llenan toda la banda. Surge una *zona de energía*, o sea, una zona de valores permitidos de energía. Repitamos y fijemos:

la interacción de intercambio quita la degeneración y transforma el nivel en zona de energía.

La ausencia de ranura entre el estado fundamental del ferromagnético y los estados con un magnón o, que es lo mismo, la igualdad a cero de la energía de la onda de espín con $k = 0$ tiene un sentido físico profundo. La excitación de impulso nulo (o de longitud infinita de onda) corresponde al giro del momento magnético del ferromagnético como un todo único (en este caso la proyección del espín total en el eje varía en la unidad). *Con tal giro la energía no puede cambiar ya que la interacción de intercambio es isótropa.* La onda de espín con vector de onda distinto a cero describe la excitación no homogénea del ferromagnético. No es raro que la energía de tal onda se diferencie de cero. Si se utiliza el concepto de magnón es fácil figurarse que $\varepsilon(p)$ es la energía del movimiento del magnón, es decir, su energía cinética. Entonces, es natural que $\varepsilon(p) = 0$ para $p = 0$.

La semejanza entre el magnón y la partícula es sobre todo evidente cuando se trata de magnones con impulsos pequeños. Como para $ak_j \ll 1$ ($j = x, y, z$)

$$\cos ak_j \approx 1 - \frac{1}{2}(ak_j)^2,$$

de las fórmulas (3.24) y (3.23) tenemos

$$\begin{aligned} &\varepsilon(p) = A\frac{a^2p^2}{\hbar^2} \quad \text{cuando } ap \ll \hbar, \\ &p^2 = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \end{aligned} \qquad (3.25)$$

En tal forma la dependencia entre la energía del magnón y el impulso es la misma que para una partícula libre de masa $m^* = \hbar^2/2Aa^2$. La magnitud m^* se denomina *masa efectiva del magnón*. Es lógico el hecho de que la masa efectiva sea inversamente proporcional a la integral de intercambio: a las partículas más ligeras les es más fácil moverse, y el

movimiento del magnón se halla condicionado por la interacción de intercambio.

Si el ferromagnético se encuentra en el campo magnético externo, en cuya dirección se alinean los momentos magnéticos de los átomos, la variación —en la unidad— de la proyección del espín de un átomo aislado va acompañada del crecimiento de la energía en $2\mu H$. Como resultado, también la energía de la onda de espín (3.24) recibirá una adición análoga:

$$\varepsilon (k) = 2A (3 - \cos ak_x - \cos ak_y - \cos ak_z) + \\ + 2\mu H. \qquad (3.26)$$

Esta fórmula recuerda la expresión (2.20) para la energía del electrón en el campo magnético. La parte de intercambio de la energía dependiente del impulso $p = \hbar k$ es análoga a la energía cinética del electrón, y la adición $2\mu H$ es la energía del espín electrónico en el campo magnético. Por eso la misma puede ser interpretada como la energía del *espín del magnón* en el campo magnético H. El factor 2 significa que al magnón hay que atribuirle un espín dos veces mayor que el electrónico, es decir, la unidad. Por otra parte, la adición de espín a la energía del electrón tiene, como es debido, dos valores: $+\mu H$ y $-\mu H$ en correspondencia con la orientación del espín según y en contra del campo (la dirección del espín y del momento magnético del electrón son opuestos por cuanto $e < 0$). El espín 1 tiene tres proyecciones: +1, 0 y —1. Aparentemente, la adición de espín a la energía del magnón también debería tener tres valores: $-2\mu H$, 0 y $+2\mu H$. El hecho de que en la fórmula (3.26) figura tan sólo un valor de la adición de espín significa que de tres estados posibles con diferentes proyecciones del espín se realiza solamente uno, el de proyección igual a —1. La causa física de este resultado es comprensible: la formación del magnón (de la onda de espín) se debe a la disminución de la proyección del espín del ferromagnético; con el fin de conseguirlo, el magnón ha de tener una proyección negativa del espín. La última observación sobre la realización de uno de los tres estados de espín del magnón no excluye el hecho de que

el magnón es una cuasipartícula de espín igual a la unidad.

La expresión (3.24) de la energía del magnón $\varepsilon (k)$ posee periodicidad en cada una de las tres variables: en k_x, en k_y y en k_z (el coseno es una función periódica). Los tres perío-

dos son idénticos e iguales a $2\pi/a$. La periodicidad de la energía es el resultado directo de la periodicidad del cristal. Esta cualidad es propia no sólo de la energía del magnón, sino también de su función de onda. Eso significa que dos estados con vectores de onda k y k' son *indistinguibles físicamente* si

$$k'_x - k_x = \frac{2\pi}{a} n_1, \quad k'_y - k_y = \frac{2\pi}{a} n_2, \quad k'_z - k_z = \frac{2\pi}{a} n_3,$$

y n_1, n_2 y n_3 son números enteros. Las últimas igualdades pueden escribirse de forma compacta introduciendo el vector K con las siguientes componentes «numéricas enteras»:

$$K_x = \frac{2\pi}{a} n_1, \quad K_y = \frac{2\pi}{a} n_2, \quad K_z = \frac{2\pi}{a} n_3.$$

De este modo, dos estados físicamente indistinguibles si los vectores de onda k y k' se diferencian en el vector K:

$$k' = k + K. \tag{3.27}$$

Por eso todos los estados *diferentes* del magnón se determinan por los valores de los vectores de onda de la celdilla cúbica con aristas iguales a $2\pi/a$. De los vectores K se puede construir (en el papel, claro está) una red cristalina. Ésta se denomina *red recíproca*. Todos los estados diferentes del magnón tienen vectores de onda de una celdilla elemental de la red recíproca. Al multiplicar la longitud de las aristas de la celdilla elemental de la red recíproca por $\hbar$, obtendremos una celdilla que contiene los valores del impulso a los que corresponden distintos estados del magnón.

Para una partícula ordinaria los asuntos toman otro cariz. Los estados con distintos impulsos «auténticos» siempre se diferencian unos de otros y el impulso puede tomar cualquier valor, incluso tan grande como se quiera*). Aquí radica la diferencia entre el impulso de la partícula libre y el que le hemos atribuido a la cuasipartícula (en este caso, al magnón). Para subrayar esta diferencia, el impulso de la cuasipartícula se denomina *cuasiimpulso*. Recalquemos: el prefijo «cuasi» en la palabra cuasiimpulso no se emplea por-

*) Por cierto, en este caso para la energía conviene utilizar no la fórmula acostumbrada $\varepsilon = p^2/2m$, sino la relativista: $\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ (los fundamentos de la mecánica relativista, es decir, de la teoría de la relatividad, se exponen en el libro de L. Landau y Y. Rumer «Qué es la teoría de la relatividad», publicado en español por la Editorial Mir).

que se trata de cuasipartícula. Se pueden citar ejemplos de que el estado de una partícula verdadera en estado estacionario se caracteriza por un cuasiimpulso y, al contrario, el de una cuasipartícula, por un impulso. Ejemplo primero, partícula: un electrón en la red cristalina*); ejemplo segundo, cuasipartícula: un fotón (cuanto del campo electromagnético) en el vacío.

La sustitución de un impulso por un cuasiimpulso es el resultado de las propiedades geométricas del mundo en que «viven» los magnones. Los estados de cualesquiera cuasipartículas —análogos cuánticos de las excitaciones elementales de los cristales— se describen por los cuasiimpulsos y no por los impulsos. Aún nos encontraremos con eso.

Apartándonos algo del tema explicaremos qué sentido atribuimos a las palabras «propiedades geométricas del mundo». La red cristalina coincidirá con sí mismo si se traslada en un vector que une dos nudos equivalentes. La traslación mínima que hace coincidir la red cúbica con sí mismo es igual a a y debe efectuarse a lo largo de uno de los ejes: x, y o z (véase la fig. 50). En lo que se refiere al espacio vacío, éste es homogéneo y, por lo tanto, coincide con sí mismo para cualquier traslación, incluso para la infinitamente pequeña. La longitud de la arista de la celdilla de la red recíproca que es inversamente proporcional a a determina la zona en que se prefijan los cuasiimpulsos. En el caso de espacio vacío podemos considerar que la constante de la red es igual a cero. Entonces, la celdilla de la red recíproca resulta infinitamente grande. En este sentido el impulso no es sino un cuasiimpulso con celdilla infinitamente grande de la red recíproca.

COMPLEJOS DE ESPÍN

Así pues, la excitación elemental (mínima) del sistema magnético de un ferromagnético puede (y debe) concebirse como la formación de una cuasipartícula, el magnón, que se caracteriza por el cuasiimpulso $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ y la energía $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{p})$ determinada por la fórmula (3.24) o la (3.26). Es lógico hacer la siguiente pregunta: ¿tal vez sea posible describir cualquier estado de excitación del ferromagnético como

*) Cuando examinamos las propiedades de los electrones de conducción en los metales recurrimos a la simplificación «eliminando» del metal la red cristalina que consta de iones positivos (véase el capítulo 2, § 4).

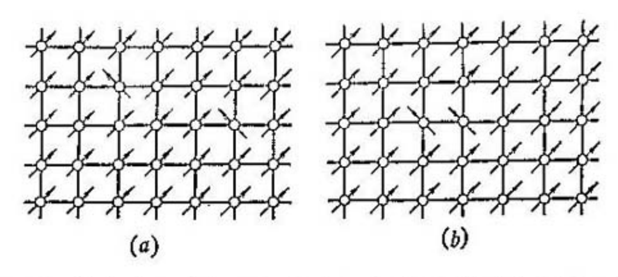


FIG. 52. *Entre los estados no estacionarios del cristal hay tales en los que los espines de dos átomos están «desviados» de la dirección común. Estos dos átomos pueden encontrarse lejos uno de otro (a) o ser vecinos (b).*

el estado con uno u otro número de magnones? Una respuesta positiva a esta pregunta significaría que las fórmulas (3.24) y (3.26) determinan plenamente el espectro de energía del ferromagnético. Por desgracia, la respuesta será negativa. Mejor dicho: hablando en general, negativa. Esto significa que a veces se puede y a veces no.

Para comprender en qué reside el asunto, analicemos un caso elemental, cuando la excitación del sistema magnético es la desviación mínima de dos espines o la desviación doble de uno solo*). No estaría mal vincular con cada desviación su respectivo magnón. Entonces la energía de excitación sería la suma de energías de estos dos magnones. Pero en realidad la situación es más complicada. Se trata de lo siguiente: entre los estados no estacionarios (¡!) con dos espines desviados existen también tales cuyos espines desviados se encuentran uno al lado de otro (fig. 52). Pero en este caso, de acuerdo con la fórmula (3.8′), influye la interacción de intercambio entre éstos. Dicha circunstancia conduce a que dos magnones *entren en acción recíproca uno con otro.*

La interacción entre cualesquiera partículas se manifiesta de dos formas: o provoca su dispersión unas sobre otras, o da lugar a la formación de un sistema coherente de dos partículas (claro está, si éstas se atraen mutuamente). En el primer caso, durante la dispersión, las partículas se aproximan y luego se separan, de modo que la mayor parte del tiempo se encuentran tan lejos una de otra que su inter-

---

*) Se trata del estado del ferromagnético con la proyección del espín $S_z = Ns - 2$. Si el espín de un átomo aislado $s = 1/2$, entonces, la desviación doble del átomo aislado es imposible: si la proyección del espín del átomo se ha reducido de $s_z = 1/2$ a $s_z = -1/2$, ya no puede disminuir más.

acción simplemente puede ser despreciada. Además, la energía y el impulso de dos partículas son exactamente iguales a la suma de sus energías e impulsos.

En el segundo caso, la formación de un estado coherente significa que las partículas no se «separan» (existe una distancia máxima a la que las mismas pueden alejarse una de otra). Un buen ejemplo de tal sistema integrado por dos «partículas» puede servir la Tierra y la Luna: esta última realiza su movimiento alrededor de nuestro planeta siguiendo una órbita casi circular. La energía de la Luna, igual a la suma de las energías cinética y potencial, es negativa (para la atracción es negativa la energía potencial, si se admite que la energía de interacción tiende a cero cuando los cuerpos están alejados infinitamente unos de otros). Pero si la energía de una «partícula» en movimiento es positiva (como sucede con los cometas), entonces, a pesar de la atracción, no existe estado coherente: el cometa se aleja de la Tierra y a veces abandona incluso el sistema Solar.

Un análogo cuántico del sistema Tierra—Luna es el átomo de hidrógeno. Los estados con energía negativa son estados coherentes (su energía se determina por la fórmula (1.21)). La energía igual a cero separa en el átomo los estados coherentes del electrón de los estados libres en los que este último es dispersado por el núcleo. Ambos ejemplos (tanto el cósmico como el atómico) sirven para formular la tesis:

en caso de atracción, según el valor de la energía, los estados del sistema de dos partículas pueden ser tanto coherentes como libres.

Retornemos al sistema de dos magnones. Destaquemos su movimiento como un todo único (con cuasiimpulso igual a la suma de sus cuasiimpulsos) y su movimiento relativo. Como resulta, los magnones se atraen mutuamente, con la particularidad de que el valor de tal atracción depende de su cuasiimpulso total. Para las partículas en el vacío eso es imposible. Siempre podemos pasar al sistema inercial de coordenadas en el que el centro de gravedad de las partículas se halla en reposo, es decir, su impulso total es igual a cero. De la velocidad del sistema de referencia inercial que hemos elegido no puede depender y no depende nada (en ello consiste el enunciado del principio de la relatividad de Galileo). Semejante transición es imposible en un cristal

por cuanto el movimiento de las cuasipartículas transcurre respecto a la red cristalina que es el sistema de referencia elegido. La dependencia de la magnitud de interacción entre los magnones y su cuasiimpulso total es una manifestación más de la diferencia fundamental entre el cuasiimpulso y el impulso.

Si el cuasiimpulso total supera cierto valor determinado, la atracción es bastante grande, y a la par con los estados en los que los magnones se dispersan existe un estado (con ese mismo cuasiimpulso total) en el que los magnones forman un sistema coherente. La energía de este estado es menor que la suma de las energías de los magnones libres. De una forma palmaria esto puede representarse como el movimiento por una red cristalina de dos espines desviados que se encuentran uno al lado de otro (fig. 52, *b*).

El estado coherente de dos magnones se denomina *complejo de espín*.

De este modo, además de los estados con dos magnones libres, en determinadas condiciones existe un estado con menor energía, en las que dos magnones forman un complejo de espín. En el caso de tres desviaciones de espín existen tres tipos de estados: tres magnones libres, un complejo de espín de dos magnones y un magnón libre y, finalmente, un complejo de tres magnones. Es evidente la generalización de un número mayor de desviaciones de espín ...

Como se ve, el espectro de energía del ferromagnético tiene una estructura compleja. De principio, el conocimiento del espectro de energía de un cuerpo permite calcular todas sus características termodinámicas: la capacidad calorífica, el momento magnético, etc. Sin embargo, si el espectro es muy complejo, las fórmulas correspondientes se vuelven demasiado engorrosas y, por consiguiente, inútiles. El cálculo de las características termodinámicas del ferromagnético se simplifica sustancialmente si su temperatura es mucho menor que la de Curie T_c. Como veremos, en este caso, los que más contribuyen al desarrollo de las características termodinámicas son los estados con un número pequeño de magnones, cuando la acción entre éstos se manifiesta débilmente. Esta circunstancia convierte en lícito el desprecio completo de la interacción de los magnones. Por consiguiente,

a bajas temperaturas el sistema de magnones puede considerarse como un gas perfecto.

Aún volveremos a este modelo extraordinariamente productivo, y ahora prestemos atención a la posibilidad sugestiva de analizar las ondas de espín partiendo de la descripción clásica y, por lo tanto, muy patente.

§ 8. ONDAS DE ESPÍN COMO ONDAS DE PRECESIÓN NO HOMOGÉNEA

Dejemos a parte la naturaleza cuántica de los espines examinémoslos como flechas magnéticas (imanes elementales), las cuales en un ferromagnético, como sabemos, accionan entre sí intensamente. De esta interacción son responsables las fuerzas de intercambio que tratan de alinear los imanes elementales paralelamente unos a otros. En estado fundamental éstos, en efecto, permanecen alineados, y el momento magnético de la unidad de volumen del ferromagnético $\mathcal{M}$ (o la densidad del momento magnético, o la magnetización, que son denominaciones diferentes de un mismo fenómeno) es simplemente la suma aritmética de los momentos magnéticos de distintos átomos dispuestos en este volumen.

Ahora centremos nuestra atención en un solo imán elemental cualquiera y escribamos su energía de interacción con todos los demás imanes elementales. Para conseguirlo es necesario omitir simplemente la suma respecto a uno de los índices en la fórmula (3.8′). Además hay que multiplicar y dividir toda la expresión por μ^2 con el fin de pasar de los espines de los átomos a sus momentos magnéticos. De este modo, la energía de interacción del i-ésimo momento magnético con todos los demás imanes elementales tiene la forma siguiente:

$$E_i = -\mu_i \left(\frac{A}{2\mu^2} \sum_k{}' \mu_k \right), \quad i=1, \ldots, N. \qquad (3.28)$$

Comparemos esta expresión con la fórmula (1.26) que describe la interacción del momento magnético con el campo magnético H. Se ve que el vector $\frac{A}{2\mu^2} \sum_k{}' \mu_k$ desempeña el papel de campo magnético. El mismo por eso se denomina *campo magnético efectivo* y se designa

$$H_{ef} = \frac{A}{2\mu^2} \sum_k{}' \mu_k. \qquad (3.29)$$

El momento magnético desviado del campo magnético H gira alrededor del campo con una frecuencia γH (cap. 1, § 6). Se podría pensar que el momento magnético desviado de la posición de equilibrio gira con una frecuencia fácil de calcular por la fórmula (3.29), sabiendo que en posición de equilibrio todos los momentos magnéticos permanecen paralelos. Sin embargo, el asunto es más complicado. La expresión (3.28) describe la interacción con el rodeo de cualquiera de los N momentos magnéticos (N es el número de átomos magnéticos en el cristal). Esto quiere decir que existen N expresiones como la (3.28). Los movimientos (giros) de todos los momentos magnéticos están relacionados recíprocamente. No se puede esclarecer cómo se mueve un momento magnético aislado sin investigar los movimientos de todos los imanes elementales. Ya hemos mencionado este hecho al describir los estados cuánticos del sistema de espines.

La investigación del giro de todos los imanes elementales demuestra que la forma más simple de su movimiento son las ondas de precesión no homogénea. No es difícil comprender qué representa la precesión no homogénea: basta con echar una mirada a la fig. 53. Cada onda se caracteriza por el vector de onda $\boldsymbol{k}$. Se puede calcular la frecuencia de onda ω. Ésta es la función del vector de onda que se puede determinar tan sólo investigando las ecuaciones de movimiento de todos los momentos magnéticos atómicos. Las mismas se deducen por medio de la expresión (3.28). Desgraciadamente, carecemos de la posibilidad de llevar a cabo esta investigación y tenemos que limitarnos a constatar el hecho. Tanto el enfoque cuántico como el clásico conducen a resultados idénticos; la dependencia entre la frecuencia de onda de precesión no homogénea ω y el vector de onda $\boldsymbol{k}$ coincide con la

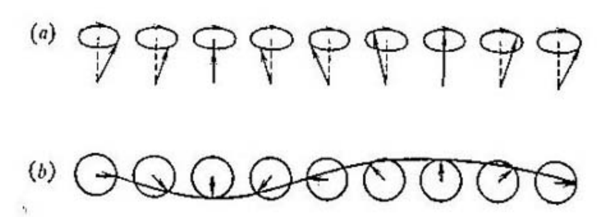


FIG. 53. *Precesión no homogénea de los espines atómicos: a) vista lateral de una cadena de espines; b) vista de arriba: se muestra una onda representada por la línea que pasa a través de los extremos de los vectores de espín.*

energía del magnón (3.24), si ésta es dividida por la constante de Planck h (acuérdense de la relación de de Broglie).

Con otras palabras,

el magnón es una onda de precesión no homogénea de los momentos magnéticos atómicos.

Ya hemos subrayado reiteradas veces que la interacción de intercambio es isótropa. Al alinear los momentos magnéticos, ella no distingue una dirección determinada hacia la cual debe orientarse el momento magnético $\mathcal{M}$. Su orientación la establece el campo magnético o las fuerzas anisótropas descritas en el § 4 de este capítulo.

La isotropía de la interacción de intercambio se manifiesta en que la frecuencia de onda de precesión (o la energía del magnón) se reduce a cero cuando tiende a cero el vector de onda $\boldsymbol{k}$. Si $\boldsymbol{k} = 0$, entonces se trata de una onda de precesión homogénea (¡$\lambda = 2\pi/k = \infty$!), es decir, simplemente del giro de todos los momentos magnéticos a un mismo ángulo, hecho que, como ya sabemos, queda absolutamente «inadvertido» por la interacción de intercambio. Pero si se «conectan» las interacciones no de intercambio (la energía de anisotropía, el campo magnético), la precesión homogénea tendrá lugar con una frecuencia bien determinada. Llamémosla ω_0. En los casos más simples ésta se añade a la frecuencia de precesión no homogénea.

La onda de precesión de los momentos magnéticos del átomo considera estructura discreta del cristal: giran precisamente los imanes *atómicos*. Si nos interesasen las ondas con vectores de onda pequeños ($ak \ll 1$) —y éstos, como veremos más tarde (véase el § 10), revisten para nosotros mayor interés— sería posible limitarse a la descripción *macroscópica* del movimiento de los momentos magnéticos, prefijando la densidad media del momento magnético del ferromagnético $\mathcal{M} = \mathcal{M}(r, t)$, o sea, la suma vectorial de los momentos magnéticos atómicos en la unidad de volumen.

En la onda de precesión no homogénea con pequeño vector de onda oscila precisamente la densidad del momento magnético del ferromagnético*). En particular, la precesión homogénea es la rotación del momento magnético de todo el

---

*) La palabra «oscila» debe entenderse de modo convencional. Precisamente eso es una *precesión no homogénea*. Aunque por el ferromagnético se propaga la onda, $\mathcal{M}^2(r, t) = \mathcal{M}_0^2$ ($\mathcal{M}_0$ es la densidad del momento magnético en saturación) ¡el momento magnético tan sólo gira!

cuerpo, y el magnón con impulso pequeño (recordemos: el impulso $p = \hbar k$) es la onda de precesión no homogénea de la magnetización (de la densidad del momento magnético).

La ventaja del enfoque clásico consiste en su sencillez y evidencia. Sin embargo, hay que tener presente que el enfoque cuántico es más exacto. Por eso es importante conocer los límites de aplicabilidad de la descripción clásica, de lo contrario se puede cometer un error.

§ 9. GAS DE MAGNONES

Examinemos ahora las propiedades del ferromagnético a temperatura baja en comparación con la de Curie T_c, cuando el estado del mismo es próximo al fundamental, máximamente ordenado.

A temperaturas bajas en el ferromagnético hay pocos magnones, por eso éstos raras veces se acercan unos a otros y su interacción no es esencial. Como ya hemos dicho, se puede prescindir en general de la interacción, considerando el sistema de magnones como un gas perfecto.

Es natural que pueden formarse complejos de espín, pero a bajas temperaturas su número es extremadamente pequeño*), por lo cual, también éstos pueden ser despreciados.

De este modo, a bajas temperaturas los magnones forman un gas ideal de cuasipartículas. Pero a bajas temperaturas se manifiestan con especial claridad las propiedades cuánticas de los sistemas no solamente de cuasipartículas, sino también de «verdaderas» partículas comunes y corrientes (véase el capítulo 2, § 4). A raíz de ello es natural que surja la pregunta: ¿los magnones son bosones o fermiones? ¿Mediante qué estadística, la de Bose—Einstein o la de Fermi—Dirac, se deben describir sus propiedades colectivas?

Ya hemos señalado que las partículas de espín nulo y espín entero son bosones, y las de espín semientero, fermio-

*) Como veremos (y, lo más probable, está claro por intuición) para $T \ll T_c$ entre los magnones prevalecen aquellos cuya energía es $\varepsilon \lesssim kT$, es decir, es mucho menor que el ancho de la zona de magnones de 12 A (de acuerdo con (3.11) $kT_c = \frac{z}{4} A$). El cuasiimpulso de tales magnones es pequeño y ellos no pueden formar un complejo de espín, además, el número de magnones con impulsos grandes es insignificante.

nes. Este teorema puede extenderse también a las cuasipartículas. El magnón tiene espín igual a la unidad, por eso los magnones son bosones, y el gas de magnones es gas de Bose.

GAS DE BOSE

Ahora es el tiempo oportuno para cumplir nuestra promesa y contar sobre las propiedades del gas de Bose degenerado, es decir, del gas de Bose a temperaturas mucho más bajas que $T_{\text{cuant}} = \frac{\hbar^2}{km}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$ (véase la fórmula (2.17)). A tales temperaturas no existen gases de Bose degenerados engendrados por partículas «verdaderas»: todos ellos a $T \gg T_{\text{cuant}}$ se convierten en líquido y todos (menos el helio) se solidifican. Informaremos acerca de las propiedades que tendría el gas de Bose conforme a las reglas de la estadística cuántica si el mismo existiera*).

Así pues, el volumen V está lleno de N partículas de Bose a $T \ll T_{\text{cuant}}$. Cada partícula se mueve obedeciendo las leyes de la mecánica cuántica, y su energía se determina por el valor de su impulso: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$. Recuerden que en este caso la coordenada de la partícula no tiene un valor determinado. Al igual en el caso del gas de Fermi (pág. 95) comenzaremos por el cero absoluto de temperatura, cuando el sistema debe encontrarse en estado fundamental, o sea, en estado de energía mínima. Por cuanto los bosones no obedecen el principio de exclusión de Pauli, no hay nada que les impida pasar al estado de impulso igual a cero. Esta acumulación macroscópica de partículas en el estado de $p = 0$ lleva el nombre de *condensado*. De esta forma,

el estado fundamental del gas de bosones es el condensado.

La excitación fundamental del gas de bosones es la salida de una partícula del condensado, es decir, la aparición (generación) de una partícula en movimiento, una partícula de $\boldsymbol{p} \neq 0$. Como la mayoría de los métodos de detección de las partículas están relacionados con el registro de su movimiento, resulta que las partículas en el condensado parece como si «no existiesen» en general, sino como si «nacieran» cuando se ponen en movimiento. La estadística cuántica por-

*) Ahora se hacen tentativas de crear artificialmente el gas de Bose degenerado.

mite determinar el número medio de partículas de impulso $p \neq 0$, o sea, la función de equilibrio de la distribución a temperatura $T < T_{cuant}$:

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/kT} - 1}. \qquad (3.30)$$

Si nos interesa la densidad media $\bar{n}(\varepsilon)$ del número de partículas en un intervalo infinitamente pequeño de energías, de ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, entonces, la última expresión debe multiplicarse por la densidad de los estados*) $g(\varepsilon)$ igual a $\frac{(2s+1)V}{\pi^2\hbar^3\sqrt{2}} m^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$, donde s es el espín de la partícula ($s = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{(2s+1)Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \qquad (3.31)$$

El número total de partículas de Bose *en movimiento* a la temperatura T se calcula integrando respecto a todas las energías:

$$N_p = \frac{(2s+1)m^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3} V \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \qquad (3.32)$$

Aunque para $\varepsilon = 0$ el subintegrando se hace infinito y la integral tiene un valor completamente determinado que crece proporcionalmente a $T^{3/2}$. El número de partículas en el condensado N_0 es igual al número total de partículas N sustrayendo N_p. A la temperatura $T = T_0$, donde

$$kT_0 \approx \frac{3{,}31}{2s+1} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}, \qquad (3.33)$$

el condensado deja de existir: cuando $T > T_0$ se mueven todas las partículas. De ordinario, el comportamiento del gas de Bose se investiga reduciendo paulatinamente la temperatura, por eso la temperatura T_0 se denomina temperatura de *condensación de Bose—Einstein*. Cuando $T < T_0$ el número finito de partículas no se mueve y se encuentra en el condensado. El comportamiento específico del gas de Bose debe

---

*) Hemos contado sobre la densidad de los estados y explicamos por qué es proporcional a $\sqrt{\varepsilon}$ en la pág. 89. La fórmula aquí expuesta se diferencia de la (2.19) en que está escrita para un espín arbitrario. Para el electrón es necesario sustituir $s = 1/2$, y en este caso obtenemos, como es natural, la fórmula (2.19).

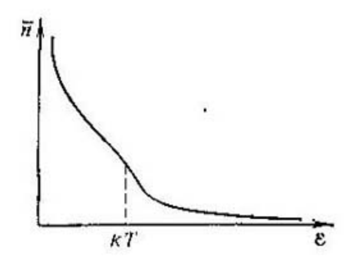


FIG. 54. *Distribución de las partículas del gas de Bose con $p \neq 0$ según las energías, en unidades arbitrarias. El área bajo la curva $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ es igual al número total N_p de las partículas en movimiento del gas en el recipiente.*

manifestarse en todas sus propiedades termodinámicas. Así, la capicadad calorífica del gas de Bose cuando $T < T_0$ es proporcional*) a $T^{3/2}$.

Para concluir este capítulo veremos cómo están distribuidas las partículas por las energías cuando $T < T_0$. Lo veremos literalmente. En la fig. 54 se representa la densidad media de las partículas $\bar{n}$ (ε). Se ve que prácticamente todas las partículas están concentradas en el intervalo de 0 a kT, y con el crecimiento ulterior de la energía, la densidad disminuye con rapidez, de forma exponencial.

* * *

Retornemos al gas de magnones. Utilicemos el enfoque desarrollado en el párrafo anterior y destacado en la pág. 162 (en cursiva). Comencemos por la onda de precesión no homogénea. Ésta se caracteriza por el vector de onda k y la frecuencia ω. Por cuanto existe frecuencia (en este caso $\omega(k)$), se puede hablar del «oscilador» que vibra con frecuencia $\omega(k)$. No es tan importante lo que oscila, lo primordial es el propio hecho *de oscilar*. Como sabemos, de acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica, la energía del oscilador puede tomar valores iguales a

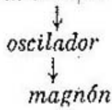
$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2} \hbar\omega(k) + n_k \hbar\omega(k). \qquad (3.34)$$

Intencionadamente hemos escrito en esta forma la expresión más corriente $(n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ con el fin de subrayar que $n_k \hbar\omega(k)$ es la energía del estado de excitación. El estado del ferromagnético se puede establecer eligiendo los números

*) La capacidad calorífica del gas clásico no depende de la temperatura, mientras que la capacidad calorífica del gas de Fermi disminuye hasta cero según la ley lineal.

n_k, o sea, el grado de excitación de cada oscilador. Puesto que la onda de precesión no homogénea puede compararse con un magnón de cuasiimpulso $p = \hbar k$ y energía $\hbar\omega(k)$, resulta que el grado de excitación del oscilador (el número n_k) puede considerarse como el número de magnones*) con vector de onda k o impulso $p = \hbar k$. Así pues, tenemos un esquema patente:

la onda de espín como una onda de precesión no homogénea



Cuando se determina el estado del ferromagnético no hay necesidad de conocer los valores exactos (en cada instante) de los números de los magnones n_p (hemos pasado terminantemente al lenguaje corpuscular, sustituyendo k por p). Para deducir la relación entre las magnitudes que caracterizan el gas de magnones y la temperatura es suficiente conocer el número *medio* de magnones con impulso p: la función de distribución de los magnones $\overline{n}_p$. Nuestra tarea inmediata es la determinación de dicha función.

Mientras tanto hagamos otra digresión.

OSCILADOR CUÁNTICO

Volvamos a la fórmula (2.5) en la pág. 87. El primer miembro de la igualdad contiene la relación entre el número de partículas de energía ε_M y el número total de partículas. Dicha relación puede considerarse como la probabilidad W_M de que la partícula tiene una energía dada ε_M. El segundo miembro es

$$\frac{e^{-\frac{\varepsilon_M}{kT}}}{\sum\limits_M e^{-\frac{\varepsilon_M}{kT}}},$$

*) La introducción de magnones la justifica precisamente la circunstancia de que la energía de excitación puede tomar —en unidades $\hbar\omega(k)$— tan sólo valores enteros. Por supuesto, aquí exponemos no una deducción estricta, ni mucho menos. En la teoría del ferromagnetismo las fórmulas citadas sí que se demuestran de forma rigurosa. En particular, queda demostrado que tiene lugar la fórmula (3.34), la cual es la principal para esta parte de nuestro relato sobre el gas de magnones.

es decir,

$$W_M = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_M}{kT}}}{\sum_M e^{-\frac{\varepsilon_M}{kT}}},$$

con la particularidad de que la suma en el denominador se realiza respecto a todos los estados cuánticos posibles. Esta relación simple (si no se concreta qué es ε_M) es la base de la estadística física. Apliquémosla al oscilador con frecuencia ω. Entonces

$$W_n = \frac{e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}} \tag{3.35}$$

es la probabilidad de que el oscilador se encuentra en n-ésimo estado cuántico. El valor medio*) de toda magnitud física que depende del grado de excitación del oscilador, es decir, del número n, se halla multiplicando esta magnitud por W_n y sumando todos los n. En primer lugar hallamos el valor medio del propio grado de excitación:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} nW_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

La suma infinita en el denominador es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a la unidad, y la razón de la progresión $e^{-\hbar\omega/kT}$. A raíz de ello

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

---

*) En la teoría de las probabilidades este valor medio a menudo se denomina *esperanza matemática*.

La suma en el numerador se obtiene de la suma en el denominador si esta última se somete a diferenciación respecto a la magnitud $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ y se toma con signo inverso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}} = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\right)\Big|_{x=\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

De este modo, definitivamente

$$\overline{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (3.36)$$

Antes de proceder al examen de esta fórmula importante, escribamos el valor de la energía media del oscilador:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (3.37)$$

el cual muestra muy bien cómo se efectúa la transición a la estadística clásica: para $\hbar\omega \ll kT$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT},$$

y nos cercioramos de que

el valor medio de la energía del oscilador en condiciones cuando es aplicable el análisis clásico, es igual a la temperatura expresada en unidades de energía $\overline{\varepsilon} = kT$.

En estas mismas condiciones el valor medio del grado de excitación del oscilador $\overline{n} \sim \frac{kT}{\omega}$. Formalmente el factor de proporcionalidad contiene la constante de Planck, pero el mismo no tiene importancia alguna debido a que se elimina al calcular los valores medios.

La deducción de las fórmulas (3.36) y (3.37) que hemos reproducido aquí fue realizada por primera vez por Max Planck en 1900, cuando él estudiaba la radiación del cuerpo negro, es decir, del cuerpo que irradia pero no refleja ondas electromagnéticas (un pequeño orificio practicado en una gran cavidad simula bien las propiedades del cuerpo negro). Con el fin de explicar los datos experimentales, Planck tuvo que enunciar una hipótesis que significaba la renuncia a la física clásica: reconocer que el oscilador puede encontrarse

solamente en estados en que su energía es múltipla de $\hbar\omega$ (véase la fórmula (3.34)). Planck eligió el valor de la constante, que más tarde recibió su nombre, de tal forma que la semejanza entre las curvas experimental y teórica fuese óptima*).

* * *

Del esquema en la pág. 167 queda claro que la función de equilibrio de distribución de los magnones

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p)}{kT}} - 1}, \qquad (3.38)$$

es idéntica a la función de distribución de las partículas en el gas de Bose a una temperatura inferior a la de la condensación de Bose—Einstein. ¡El conjunto de magnones es, efectivamente, el gas de Bose!

La diferencia entre la fórmula (3.38) y la (3.30) consiste en que la primera describe la distribución de todos los magnones. Falta el condensado de magnones.

Si la temperatura del ferromagnético es mucho menor que la de Curie, entonces, como sabemos del análisis del gas de Bose degenerado, el papel primordial en sus propiedades lo desempeñan las partículas (en este caso las cuasipartículas, o sea, los magnones) con una energía inferior a kT. Esta circunstancia permite aprovechar la fórmula aproximada (3.25) y, además, las fórmulas (3.31) y (3.32) en las cuales, sin embargo, es necesario sustituir $2s + 1$ por 1, debido a que (¿se acuerdan?) de los tres estados posibles de espín del magnón se realiza sólo uno con $s_z = -1$. En vez de la masa de la partícula m hay que sustituir la masa efectiva del magnón $m^* = \hbar^2/2Aa^2$ (véase la pág. 154).

El conocimiento de la función de equilibrio de distribución $\bar{n}_p$ da la posibilidad de calcular diferentes magnitudes macroscópicas: las características del gas de magnones y,

*) Incluso en el día de hoy, al cabo de más de ochenta años después de la aparición de la constante de Planck, no tenemos posibilidad alguna de *calcularla*. No se calcula, así como tampoco se calculan otras constantes fundamentales de la física: la velocidad de la luz c y la carga del electrón e. Éstas deben *medirse*. Es de interés señalar que el valor más exacto de la constante de Planck $\hbar$ fue obtenido por medio de un dispositivo superconductor, es decir, por los métodos de la física cuántica del sólido.

por consiguiente, del ferromagnético. Para nosotros el mayor interés lo reviste el momento magnético del gas de magnones en la unidad de volumen, o sea, su magnetización. A esta importante cuestión es preciso dedicarle un párrafo especial.

§ 10. MAGNETIZACIÓN Y CAPACIDAD CALORÍFICA DEL FERROMAGNÉTICO A BAJAS TEMPERATURAS

Al analizar los magnones en un ferromagnético situado en el campo magnético, nos hemos convencido de que cada magnón «lleva en sí» un momento magnético dirigido en contra de la magnetización del ferromagnético e igual al magnetón de Bohr duplicado. Por esta causa, la magnetización de la unidad de volumen del ferromagnético $\mathcal{M}(T)$ es la diferencia entre el momento magnético a cero absoluto de temperatura $\mathcal{M}_0 = N\mu s$ y el momento magnético del gas de magnones. Este último simplemente es igual al número de magnones N_{magn} multiplicado por 2μ. Así,

$$\mathcal{M}(T) = N\mu s - 2\mu N_{magn}. \tag{3.39}$$

Si el campo magnético H es pequeño ($\mu H \ll kT$) (véase la pág. 80) se puede considerar igual a cero y utilizar la fórmula (3.32) sin olvidarse de sustituir m por la masa efectiva del magnón y $2s+1$ por la unidad. Como resultado obtenemos*):

$$\mathcal{M}(T) = N\mu s\left[1 - 0{,}1\left(\frac{kT}{A}\right)^{3/2}\right]. \tag{3.40}$$

Hemos tomado en consideración que en cada celdilla del cristal hay un átomo con momento magnético μs, es decir, $\frac{1}{a^3} = N$.

Esta relación, que dedujo por primera vez F. Bloch en 1930, a menudo se llama ley de Bloch o «ley de 3/2», teniendo en cuenta el exponente de potencia de la temperatura.

Ahora vemos cuán erróneo fue el resultado obtenido por nosotros a partir del modelo de Curie—Weiss. Tanto la fórmula (3.5) como la (3.40) se han deducido suponiendo que entre los momentos magnéticos atómicos actúan tan sólo fuer-

---

*) No nos debe desconcertar el hecho de que en la fórmula (3.32) la integración se realiza hasta el infinito: la aportación de estados de energía superior a kT es absolutamente insustancial.

zas de intercambio. No obstante, en el modelo de Curie—Weiss se considera que la energía del sistema de espines se determina unívocamente por la magnetización total, mientras que de la teoría mecanocuántica correcta se deduce la existencia de magnones cuya excitación, con el crecimiento de la temperatura, conduce a la desimantación de la muestra ferromagnética. Sin duda alguna, el carácter potencial —y no el exponencial— de la dependencia de la magnetización se determina por el hecho de que el número de magnones N_{magn} aumenta según la ley potencial. ¿Y *por qué* N_{magn} aumenta precisamente según la ley potencial? Para comprender la razón de ello (formalmente esto se deduce de la fórmula (3.32)) examinemos el caso más complicado de un campo magnético grande o de una temperatura muy baja ($\mu H \gg kT$). Para generalizar, designemos con ε_0 la magnitud $2\mu H$ en la fórmula (3.26), recalcando que ésta es la energía de un magnón «inmóvil», es decir, de un magnón con $p = 0$, y percatándose de que se determina por todas las interacciones no de intercambio.

En este caso el número de magnones se determina por una fórmula muy parecida a la fórmula*) (3.32), con la única diferencia de que la integración se lleva a cabo no desde cero, sino desde ε_0:

$$N_{magn} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \frac{1}{A^{3/2}} \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0}\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \qquad (3.41)$$

Si $kT \ll \varepsilon_0$ la unidad en el denominador puede despreciarse, y el número de magnones resulta exponencialmente pequeño:

$$N_{magn} \approx \frac{1}{8\pi^{3/2} a^3} e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \left(\frac{kT}{A}\right)^{3/2}. \qquad (3.42)$$

Comparemos ahora las distribuciones de los magnones por energías para $\varepsilon_0 = 0$ y para $\varepsilon_0 \neq 0$. Cuando $\varepsilon_0 \neq 0$, la distribución tiene un máximo para $\varepsilon \approx kT$, es decir, para la mayoría de los magnones la energía es del orden de la temperatura (expresada en unidades de energía), sin embargo, cuando $\varepsilon_0 \gg kT$, el número total de partículas es exponen-

*) *Problema* 23. Recurriendo a los razonamientos que utilizamos al obtener la expresión para la densidad de los estados $g(\varepsilon)$ (véase la pág. 96), así como a la relación entre la energía del magnón y el impulso $p \ll \hbar/a$, deduzcan la fórmula (3.41).

cialmente pequeño. Con $\varepsilon_0 = 0$, la mayoría de los magnones tiene una energía inferior a kT, pero su número total es proporcional a $(kT)^{3/2}$. Así pues, todo estriba en el hecho de si la región de los valores permitidos de energía está separada de la energía del estado fundamental por una ranura o no. La existencia de esta última conduce a la variación exponencial del número de magnones y, por lo tanto, también de la magnetización en función de la temperatura. Subrayemos que en los ferromagnéticos, la ranura no es de origen de intercambio, precisamente por eso el resultado correcto se diferencia tanto del obtenido en el modelo de Curie—Weiss*).

La existencia de una ranura en el espectro de energía de los estados de excitación de un cuerpo macroscópico es un fenómeno muy frecuente. Es natural que siempre va acompañado de la dependencia exponencial entre las características macroscópicas del cuerpo y la temperatura que se determinan por los estados de excitación del cuerpo. Con ello se demuestra la aplicabilidad de la fórmula que hemos llamado fundamento de la estadística física (véase la fórmula en la pág. 168).

El conocimiento de la función de distribución de los magnones por energías, da la posibilidad de calcular la energía interna contenida en el gas de magnones, es decir, la suma de energías de los distintos magnones:

$$E_{\text{magn}} = \int_0^\infty \varepsilon \bar{n}(\varepsilon)\, d\varepsilon, \quad \bar{n}(\varepsilon) = g(\varepsilon)/(e^{\varepsilon/kT} - 1) \qquad (3.43)$$

Procediendo de forma análoga a lo expuesto anterior y considerando que $\varepsilon_0 = 0$, estableceremos fácilmente que $E_{\text{magn}} \sim T^{5/2}$. La energía de los magnones, como es lógico, tiende a cero si tiende a cero la temperatura, pero esta tendencia, como lo entenderemos pronto, es relativamente lenta**). En esencia, precisamente a esta circunstancia se debe nuestro interés por la variación de la energía de los magnones en función de la temperatura

Como se sabe, la capacidad calorífica de un cuerpo es la cantidad de calor recibido por éste al calentarse a 1 grado.

---

*) *Problema 24.* Valiéndose de la fórmula (3.42) calculen $\mathcal{M}(T)$ para $\varepsilon_0 = 2\mu H \gg kT$ y compárenlo con la fórmula (3.5). Para la evaluación numérica tomen $H = 1000$ Oe, $T_c = 10^3$ K.

**) *Problema 25.* Hallar la dependencia $E_{\text{magn}}(T)$ para $kT \ll \varepsilon_0$.

Si el volumen del cuerpo no cambia, el calor recibido se invierte en el aumento de su energía interna, es decir, el calor recibido es igual a la variación de la energía interna del cuerpo E_{cuerpo}. Por esta razón, para un volumen fijado (y el volumen de un sólido prácticamente siempre puede considerarse fijado) la capacidad calorífica C es igual a $\frac{dE_{\text{cuerpo}}}{dT}$. Sin duda alguna, los magnones contribuyen al incremento de la energía interna del ferromagnético. Por eso se puede hablar de la parte de la capacidad calorífica de los magnones del ferromagnético:

$$C_{\text{magn}} = \frac{dE_{\text{magn}}}{dT}. \tag{3.44}$$

La capacidad calorífica de los magnones del ferromagnético, como se deduce de lo expuesto con anterioridad, al igual que la magnetización, depende linealmente de $T^{3/2}$. No está de más aducir la fórmula exacta (a razón de 1 cm^3):

$$C_{\text{magn}} \approx 0{,}1kN\left(\frac{kT}{A}\right)^{3/2} \tag{3.45}$$

(otra vez sustituimos $1/a^3$ por N). La fórmula exacta es necesaria por la siguiente razón. Cuando se trata de la magnetización, son solamente los magnones los que responden por su dependencia de temperatura a $T \ll T_c$. En cambio, cuando se trata de la capacidad calorífica, eso no es así. Al diferenciar entre la energía interna del cuerpo y la energía de los magnones, parece como si sugiriéramos ya de qué se trata. El movimiento de las partículas atómicas en un sólido no se limita a la excitación del sistema de espín. Existen estados de excitación en los que no cambian en absoluto las posiciones de los espines de los átomos. De tales movimientos los más esenciales son las oscilaciones de los átomos (iones) alrededor de su posición de equilibrio. Hablaremos de eso en el siguiente apartado.

FONONES

Los átomos oscilan en todos los sólidos y no sólo en los ferromagnéticos. Debido a ello, el contenido del presente apartado guarda relación con cualesquiera cuerpos sólidos.

Entre los átomos del sólido existen, naturalmente, fuerzas de interacción: atracción a distancias grandes y repulsión a distancias pequeñas. De lo contrario, ¿qué hubiera mantenido los átomos en forma de estructura armoniosa,

es decir, de cristal con una disposición periódicamente repetida de los átomos en el espacio? Desviemos el átomo de la posición de equilibrio. Las fuerzas, de las que hemos hablado, lo obligan a retornar a esa posición, pero los átomos vecinos, por supuesto, no permanecerán «indiferentes». Por el cristal se propagará la onda de desviaciones de los átomos respecto a la posición de equilibrio. La forma más simple (elemental) de tales ondas es la dotada de un vector de onda determinado k y de frecuencia ω dependiente de k. Y ahora emprendamos el camino acostumbrado, designado por el esquema de la pág. 167:

onda de desviaciones de los átomos



fonón

Abajo se da el nombre de la cuasipartícula puesta en correspondencia (mediante las relaciones de de Broglie) con la onda de desviaciones. Dicha partícula recibió el nombre de *fonón*, puesto que las ondas de desviaciones son ondas sonoras ordinarias que se propagan por el cristal (*phone*—en griego significa sonido), en todo caso, cuando la longitud de tal onda $\lambda = 2\pi/k$ tiene dimensiones macroscópicas que superan considerablemente las de la constante de la red a, es decir, cuando $ak \ll 1$. Resumiendo podemos decir:

el impulso del fonón (cuasiimpulso) es $\hbar k$, y la energía del fonón es $\varepsilon = \hbar\omega\,(k)$.

La energía del fonón, como corresponde a cualquier cuasipartícula que existe en una red cristalina periódica, en función periódica del cuasiimpulso (fig. 55, *a*). Sin embargo, por cuanto a nosotros nos interesarán principalmente los estados de excitación más bajos del cuerpo, resulta que podemos limitarnos a aquella relación entre la frecuencia ω y el vector de onda k que es válida para el sonido cuya longitud de onda es grande en comparación con la constante de la red a:

$$\omega = c_{son}\,k, \quad \text{o bien,} \quad \hbar\omega = c_{son}\,p, \tag{3.46}$$

donde c_{son} es la velocidad del sonido que no depende (con una buena precisión) de su frecuencia*). En diversos sóli-

*) Expongamos la escritura más corriente de la relación (3.46): $\nu = c_{son}/\lambda$, donde ν es la frecuencia cíclica, y λ, la longitud de onda; como $\omega = 2\pi\nu$ y $k = 2\pi/\lambda$, obtenemos las relaciones expuestas.

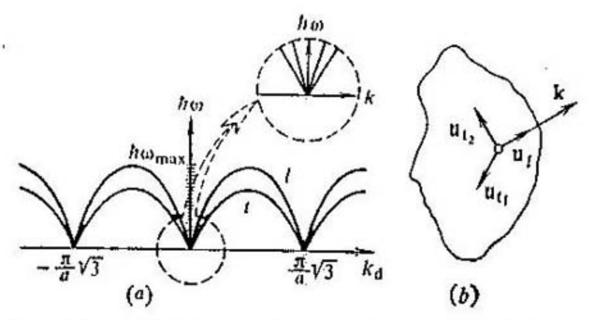


FIG. 55. *a) Variación de la energía del fonón en función de la proyección k_d del vector de onda sobre la diagonal espacial del cubo (compárese con la fig. 51) para las ondas longitudinales (l) y transversales (t). Para $k \to 0$ la variación de $\hbar\omega$ en función de k es lineal (corte). La zona de los valores permitidos de energías del fonón está marcada con rayado. b) En la onda longitudinal (l) el desplazamiento de los átomos es paralelo a k, y en las ondas transversales (son dos, t), perpendicular; u es el vector de desplazamiento del átomo.*

dos la velocidad del sonido es diferente. «En término medio» es igual a $10^4 \ldots 10^5$ cm/s.

En los sólidos se propagan tres tipos de ondas sonoras: dos de ellas son transversales y una longitudinal (en la fig. 55, *b* se observa con evidencia cómo oscilan los átomos en cada una de las ondas). Las velocidades de las ondas transversales y longitudinales se diferencian algo, pero no tomaremos en consideración esta circunstancia, sin olvidar, no obstante, que existen tres especies de fonones.

En esa misma fig. 55 se muestra la zona de los valores permitidos de las energías de los fonones. Fíjense que ésta comienza desde cero, o sea, desde la energía del estado fundamental del cristal, ¡y no hay ranura!

Al volver a leer el apartado «Oscilador cuántico», podemos decir inmediatamente: el número de fonones de impulso p se determina por la fórmula (3.36) o la (3.38), solamente que $\hbar\omega$ o $\varepsilon(p)$ ha de sustituirse por la energía del fonón (3.46). Por desgracia, no podemos (como lo hicimos en el caso de los magnones) utilizar la fórmula (3.31), ya que la densidad de los estados de los fonones $g_f(\varepsilon)$ no coincide con la densidad de los estados de las partículas ordinarias y los magnones. Al retornar otra vez a la deducción de la fórmula de la densidad de los estados de los electrones (2.19) (pág. 96), es fácil cerciorarse de que para los fonones $g_f(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$

cuando $\varepsilon \to 0$. La fórmula exacta tiene la siguiente forma (hemos tomado en consideración tres clases de fonones):

$$g_f(\varepsilon) = \frac{3V\varepsilon^2}{2\pi^2\hbar^3 c_{son}^3},$$

y, por consiguiente,

$$\bar{n}_f(\varepsilon) = \frac{3V}{2\pi^2\hbar^3 c_{son}^3} \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon/kT}-1}, \quad \varepsilon \ll \varepsilon_{máx}. \qquad (3.47)$$

También hemos escrito la condición de aplicabilidad de la fórmula. Pues utilizamos la relación (3.46) y ésta es válida tan sólo para los fonones de energía pequeña; $\varepsilon_{máx}$ es la energía máxima que puede tener un fonón. La magnitud $\frac{\varepsilon_{máx}}{k} = \Theta$ lleva el nombre de temperatura de Debye. Por regla general ésta no pasa de varios cientos de grados Kelvin. Así, para Pb dicha temperatura es igual a 90 K; para Ag, 210 K; para KBr, 180 K, y para NaCl, 280 K. Una temperatura de Debye particularmente alta la tiene el diamante: del orden de 2000 K.

La temperatura de Debye es una característica importante del cristal. Si la temperatura del cuerpo supera considerablemente la de Debye, entonces, al examinar las oscilaciones de los átomos, no hay necesidad de recurrir a la mecánica cuántica (véase el enunciado destacado en cursiva en la pág. 169). En cambio, si $T \leqslant \Theta$, el análisis cuántico es imprescindible. Como recordará el lector, a nosotros nos interesa el caso de temperaturas bajas. Precisamos: nos limitaremos a la zona de temperaturas $T \ll \Theta$. En este caso se puede no pensar en las restricciones de la fórmula (3.47) y demostrar, de forma completamente análoga a lo anterior, que la energía de los fonones es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura ($E_f \sim T^4$), y la capacidad calorífica de los fonones, a la tercera ($C_f \sim T^3$).

En la fig. 56 se representa la función de distribución de los fonones a bajas temperaturas. Se ve que la mayoría de ellos tienen una energía del orden de kT.

Escribamos con exactitud *) la expresión de la capacidad calorífica fonónica de la unidad de volumen de un cristal

---

*) *Problema 26*. Calculen la parte fonónica de la capacidad calorífica, empleando la fórmula (3.47).

12—1598

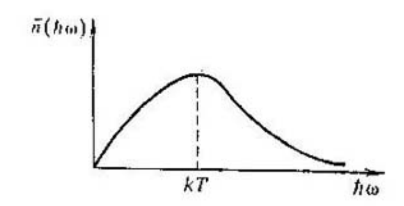


FIG. 56. *Distribución de los fonones según las energías. El área bajo la curva $n = n(\hbar\omega)$ es igual al número total de fonones a temperatura $kT \ll \hbar\omega_{máx}$.*

en cuya celdilla elemental se encuentra un átomo:

$$C_t \approx \frac{2\pi^2 k}{5}\left(\frac{T}{\hbar c_{son}}\right)^3. \qquad (3.48)$$

Vale recordar que decidimos no distinguir las velocidades de las ondas sonoras transversales y longitudinales.

Los fonones representan uno de los principales depósitos térmicos del sólido. La reducción de la capacidad calorífica del cuerpo en función de la temperatura es, por lo visto, el primer fenómeno macroscópico que halló explicación por medio de la mecánica cuántica (A. Einstein, P. Debye); en el lenguaje actual, mediante la introducción de fonones.

Fíjense en las fórmulas (3.45) y (3.48). Son muy parecidas. Ambas afirman que las capacidades caloríficas, tanto de los magnones como de los fonones, tienden a cero cuando la temperatura tiende a cero. Pero la parte magnónica tiende a cero más lentamente que la fonónica: $C_t/C_{mag} \sim$ $\sim T^{3/2} \to 0$ si $T \to 0$. A temperaturas bastante bajas, si la temperatura de Curie T_c es mayor que la de Debye Θ, son precisamente los magnones los que determinan la capacidad calorífica del cuerpo. Pero a temperaturas muy bajas ($kT \ll \varepsilon_0$) los fonones «se salen con la suya»: por cuanto el número de magnones es exponencialmente pequeño (véase la fórmula (3.42)), para $T \to 0$ la capacidad calorífica del ferromagnético la determinan precisamente los fonones *). Lo aquí expuesto tiene lugar en los ferromagné-

*) Un poco más arriba desdeñábamos la existencia de ε_0.

ticos no metales. En los metales, a bajas temperaturas, desempeñan un papel importante los electrones de conducción cuya capacidad calorífica es proporcional a la primera potencia de la temperatura (esto también es una propiedad cuántica, y su causa es la degeneración del gas electrónico; véase el capítulo 2, § 4). Como la capacidad calorífica electrónica disminuye con la temperatura más lentamente que la fonónica y la magnónica, son precisamente los electrones los que determinan la dependencia de la capacidad calorífica del metal cuando la temperatura tiende a cero.

Capítulo 4

EL ANTIFERROMAGNETISMO

Al describir las propiedades de los paramagnéticos (cap. 2, § 1), hemos señalado que para una serie de sustancias la temperatura paramagnética de Curie Θ_p en la ley de Curie — Weiss es negativa, y en el tercer capítulo, al deducir la ley de Curie — Weiss para los ferromagnéticos a temperaturas superiores a la de Curie T_c, nos hemos convencido de que Θ_p (en el modelo de Curie — Weiss ésta coincide con T_c) se determina por la integral de intercambio (véase la fórmula (3.11)). Es natural suponer que el signo negativo de Θ_p de las sustancias mencionadas está relacionado con el signo negativo de la integral de intercambio. En general, sería lógico preguntar ¿cómo deben comportarse, al disminuir la temperatura, los ferromagnéticos en los cuales la interacción de intercambio entre los átomos es grande, pero la integral de intercambio tiene signo negativo? Por lo visto, el primero en formular esta pregunta fue L. D. Landau (1933), quien demostró que en estas sustancias debe tener lugar una peculiar transición magnética de fase de segundo género no acompañada de surgimiento de momento magnético espontáneo macroscópico. Más tarde esas sustancias recibieron el nombre de *antiferromagnéticos*. Poco tiempo después del trabajo de L. D. Landau, el estado antiferromagnético fue descubierto experimentalmente por L. V. Shúbnikov y sus colaboradores (1935). En la tabla VI se dan

Tabla VI

Antiferromagnético	T_N, K	Antiferromagnético	T_N, K
$NiSO_4$	37	FeO	188
$FeSO_4$	21	NiF_2	73,2
NiO	520	FeF_2	78,3

algunos antiferromagnéticos y se designan sus temperaturas de transición de fase T_N. En honor al físico francés L. Neel, quien en 1970 obtuvo el premio Nobel de física por sus trabajos en el campo del antiferromagnetismo, la temperatura de la transición de fase al estado antiferromagnético se denomina temperatura de Neel.

§ 1. ORDENACIÓN ANTIFERROMAGNÉTICA

Como ya hemos señalado, en los antiferromagnéticos, al igual que en los ferromagnéticos, al papel principal le pertenece a la interacción de intercambio. Por esta causa resulta natural recurrir al hamiltoniano (3.8′), considerando, sin embargo, que $A < 0$. Abstraigámonos de la naturaleza cuántica de la interacción de intercambio y hasta de los espines, conviniendo en que s_i y s_k son vectores clásicos ordinarios de longitud dada y que la fórmula (3.8′) define cómo la energía del cuerpo depende de su disposición mutua *). Precisamente mutua, ya que la interacción de intercambio es isótropa respecto al giro común de todos los espines. Se ve que siendo $A < 0$, el valor mínimo de energía se alcanza para una configuración del espín en la cual se alternan los espines orientados a lo largo de cierta dirección y en oposición a ésta (fig. 57). En efecto, cuando tenemos esta configuración, cada uno de los productos escalares para los espines vecinos más próximos será máximo por su valor absoluto, así como negativo. En este caso ($A < 0$) la energía tiene valor mínimo.

La configuración con espines alternantes puede considerarse como dos redes ferromagnéticas introducidas una en la otra. Éstas suelen denominarse *subredes magnéticas*. Están ligadas recíprocamente por la interacción de intercambio negativa. En la fig. 57 se ilustra la estructura antiferromagnética más simple. Existen también estructuras más complejas. Una de éstas —la de UO_2— se representa en la

*) Como veremos a continuación (véase el § 3), el modelo clásico es una necesidad, debido a que carecemos de una teoría cuántica estricta del antiferromagnetismo.

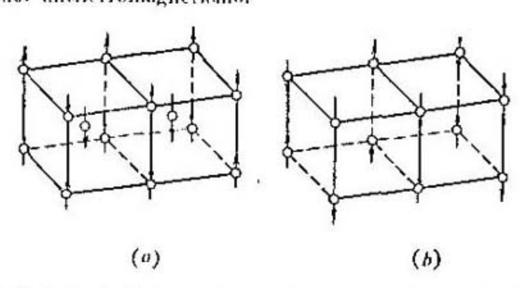


FIG. 57. *Ordenación ferromagnética de los momentos magnéticos: a) en una red cúbica centrada en el cuerpo; b) en una red cúbica simple.*

fig. 58. Si dicha estructura se describe en términos de subredes, es necesario introducir cuatro de las últimas. Aunque en adelante nos limitemos tan sólo a los antiferromagnéticos con dos subredes, cabe señalar que actualmente se han descubierto y se investigan estructuras magnéticas muy variadas y a veces sumamente extravagantes. Por ejemplo, los metales de tierras raras, en los planos atómicos vecinos, tienen los espines girados unos respecto a otros a cierto ángulo. La estructura magnética representa una espiral (fig. 59, *a*).

Existe, además, una clase grande de sustancias que parece como si reuniera las propiedades de los ferromagnéticos y los antiferromagnéticos. Estas recibieron el nombre de *ferromagnéticos* o *ferritas*. Son sustancias cuyo sistema magnético puede considerarse como un sistema de varias subredes las cuales, sin embargo, no se compensan mutuamente (por ejemplo, a costa de que la magnetización de una es varias veces mayor que la de otra; fig. 59, *b*). Un caso particular importante de las ferritas son los ferromagnéticos débiles: los antiferromagnéticos en los cuales el ángulo entre los momentos magnéticos de las subredes se diferencia un poco de 180° (fig. 59, *c*).

En la fig. 57 se ve claramente que el momento magnético macroscópico del antiferromagnético es igual a cero. Pero dicha circunstancia significa que el estado antiferromagnético no puede manifestarse de la misma manera que el ferromagnético, es decir, dando lugar a la aparición de un campo magnético alrededor de la muestra. En general, ¿es posible «ver» la estructura antiferromagnética? Para contestar a esta pregunta es necesario acordarse cómo, en general, se «ven» las estructuras cristalinas.

No sólo ver la disposición regular de los átomos, sino también medir la distancia entre éstos es posible con la ayuda de los rayos X. La base del análisis estructural por

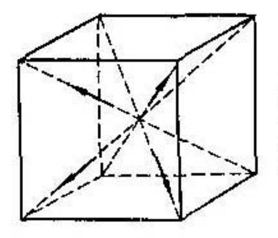


FIG. 58. *Estructura magnética del compuesto* UO_2 *definida por cuatro subredes magnéticas. Los espines de los átomos magnéticos están dirigidos según las diagonales del cubo.*

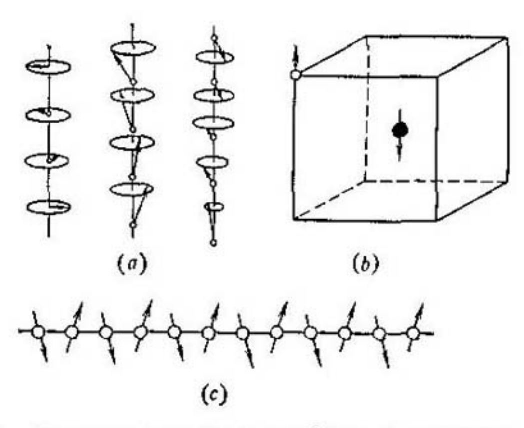


FIG. 59. *Estructuras magnéticas complejas: a) estructuras espirales; b) estructura magnética de la ferrita: el momento magnético en el vértice del cubo es menor que dicho momento en el centro del cubo; c) estructura magnética de un ferromagnético débil.*

difracción de rayos X la forma la interferencia la cual, en un caso dado, se manifiesta en que la amplitud de las ondas electromagnéticas reflejadas por planos atómicos idénticos es grande cuando la diferencia de la marcha óptica de los rayos es igual o múltiple a la longitud de onda de la radiación de Roentgen. Si el cristal se modela mediante una pila de planos paralelos (fig. 60), es fácil deducir la condición que indique para cuáles direcciones deben observarse las condiciones de interferencia. Esta condición recibió el nom-

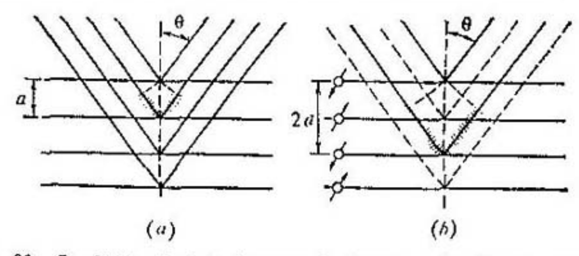


FIG. 60. *Condición de interferencia de Bragg — Wulff. La diferencia del curso óptico de los rayos reflejados de dos planos átómicos equivalentes vecinos (en el dibujo está marcada con rayado) debe ser igual a un número entero de longitudes de onda de la luz: a) cristal ordinario; b) antiferromagnético (la distancia entre los planos atómicos equivalentes es igual a 2a).*

bre de condición de Bragg — Wulff. Se expresa de la siguiente forma:

$$n\frac{\lambda}{2a}=\cos\vartheta, \qquad (4.1)$$

donde n son números enteros; λ, la longitud de onda de los rayos X; a, la distancia entre los planos atómicos, y ϑ, el ángulo de incidencia de los rayos, igual al ángulo de reflexión. Si la longitud de onda λ es mayor que la distancia interatómica duplicada a, la interferencia es, en general, imposible (precisamente debido a esta razón es necesario utilizar los rayos X cuya longitud de onda es de varios angström). Si $\lambda < 2a$, pueden observarse varios máximos cuyo número se determina por la condición $\cos\vartheta < 1$. La fig. 60, *b* en la que los planos alternantes vienen marcados por flechas orientadas en diferentes sentidos, representa el mismo «cristal» que la fig. 60, *a*, pero en estado antiferromagnético. Al parecer, el cuadro interferencial en este caso debería ser igual que el de un cristal con distancia interatómica duplicada: con la misma longitud de onda aparecerán máximos complementarios. Al parecer ... Mas no es así. Los rayos X «perciben» sólo la distribución de la carga eléctrica. Para ellos son indistinguibles los átomos con orientación distinta del momento magnético. Por esta razón

el análisis estructural por difracción de rayos X no registra la estructura magnética del cristal.

¿Hay que recurrir, tal vez, a los electrones? Gracias a las propiedades ondulatorias cuánticas éstos también interfieren y pueden servir para la determinación de las estructuras cristalinas (de acuerdo con la relación de de Broglie, su longitud de onda es igual a $2\pi\hbar/p$, donde p es el impulso). Además, los electrones tienen momento magnético y por eso interaccionan de forma diferente con los átomos cuyos momentos magnéticos son distintos. Pero, a pesar de todo, si hiciéramos un experimento de dispersión de electrones por el ferromagnético, lo más seguro, no obtendríamos el efecto deseado. El asunto reside en que las fuerzas eléctricas de interacción son $(137)^2$ veces mayores que las fuerzas de interacción entre los momentos magnéticos. Prestamos atención a esta circunstancia en el primer capítulo, cuando hablábamos de la estructura del átomo (§ 9). Debido a ello, la dispersión originada por átomos

idénticos, con momentos magnéticos dirigidos en sentidos opuestos, será casi igual: prácticamente es imposible notar alguna diferencia. Pero si existiesen partículas microscópicas con momento magnético pero sin carga, ¡sería otra cosa!

No obstante, tales partículas existen. Son los neutrones. Por cierto, su momento magnético es pequeño (véase la tabla I en la pág. 47), pero, en cambio, carecen de carga. Por medio de los neutrones que se dispersan gracias precisamente a la interacción con los momentos magnéticos de los átomos, en efecto, es posible esclarecer cómo están dispuestos los momentos magnéticos en los cristales del antiferromagnético *). Así pues,

la dispersión elástica de los neutrones es un método de investigación de las estructuras magnéticas.

Hemos subrayado que se trata de una dispersión elástica, es decir, de tal dispersión con la que el neutrón, al dispersarse, no cambia su energía (véase más abajo).

Aunque tanto en el estado paramagnético como en el antiferromagnético el momento magnético del cuerpo es igual a cero, a pesar de todo sus características magnéticas se diferencian considerablemente. A altas temperaturas la susceptibilidad magnética obedece la ley de Curie — Weiss y en el punto de Neel tiene un máximo; con el descenso ulterior de la temperatura dicha susceptibilidad disminuye. Realizando mediciones en los monocristales es posible revelar cierta diferencia en el comportamiento de las susceptibilidades longitudinal $\chi_{\parallel}$ y transversal $\chi_{\perp}$ (fig. 61). Al medir la susceptibilidad longitudinal, el campo magnético se halla dirigido a lo largo de los momentos magnéticos alineados, mientras que al medir la susceptibilidad transversal, el mismo permanece perpendicular a estos últimos.

El paso a través del punto de Neel va acompañado del aumento brusco de la capacidad calorífica del antiferromagnético (fig. 62); este efecto es característico de las transiciones de fase de segundo género.

Como siempre (véase el capítulo 3, § 3), la transición de fase de segundo género es el paso del «desorden» al «orden». En un caso dado el desorden se manifiesta en que

---

*) *Problema 27.* Evalúen (aproximadamente) qué energía deben tener los neutrones para que puedan utilizarse para el análisis de las estructuras de los cristales.

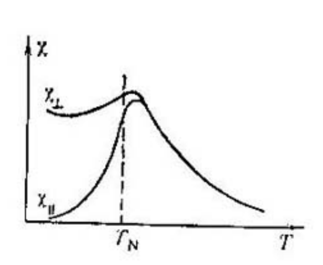


FIG. 61. *Variación de las susceptibilidades transversal $\chi_\perp$ y longitudinal $\chi_\perp$ del ferromagnético en función de la temperatura (T_N es la temperatura de Neel).*

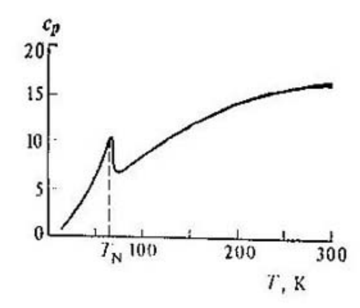


FIG. 62. *Variación de la capacidad calorífica del antiferromagnético MnF_2 en función de la temperatura.*

todos los nudos de la red cristalina (se sobreentiende que aquellos en los cuales están situados los átomos magnéticos) son absolutamente idénticos, con la particularidad de que en cada nudo el valor medio del momento magnético es igual a cero. Comenzando del punto de Neel (para $T \leqslant T_N$) surge el «orden», es decir, los nudos empiezan a distinguirse: en unos el momento magnético medio «mira» hacia un lado, y en otros, hacia el lado opuesto. La suavidad de transición (¡no olviden que se trata de una transición de fase de segundo género!) es asegurada por el hecho de que en el punto de Neel la magnitud del momento magnético medio en el nudo es igual a cero, la misma crece con el descenso de la temperatura y a $T = 0$ alcanza su valor máximo posible. Tal comportamiento en función de la temperatura confiere mayor sentido físico a la afirmación de la pág. 182 acerca de que el ferromagnético representa dos subredes ferromagnéticas introducidas una en otra *).

*) En el § 3 del capítulo 3 hemos descrito cómo transcurre la ordenación en la aleación CuZn. Se ve que la ordenación antiferromagnética recuerda mucho la de aleación. De «componentes de la aleación» sirven los átomos con direcciones diferentes de los momentos magnéticos.

§ 2. EL CAMPO MAGNÉTICO MODIFICA LA ESTRUCTURA DEL ANTIFERROMAGNÉTICO

En el ferromagnético, a una temperatura baja en comparación con la de Curie, el papel que desempeña el campo magnético permanente y homogéneo no es grande: éste hace girar el momento magnético y se opone al desorden magnético, realizando aquello que recibió el nombre de paraproceso (véase la pág. 142). En el ferromagnético, el papel que desempeña el campo magnético es más interesante. Su aumento puede modificar la estructura magnética del antiferromagnético: el campo magnético puede ser la causa de las *transiciones de fase magnéticas*. Precisamente a esta materia nos referiremos en el presente párrafo.

Partiremos de la suposición de que el campo magnético es esencial para la orientación de los momentos magnéticos de las subredes, pero no modifica su longitud. Esta conjetura, que se cumple bien en amplios intervalos de valores de los parámetros (temperatura, constantes de anisotropía, intercambio, etc.), sirve de base teórica para las investigaciones de las *transiciones de orientación* en los magnéticos. Por otra parte, dicha conjetura simplifica tanto el problema, que permite su solución casi completa incluso en las páginas de nuestro libro.

Así pues, debemos averiguar cómo el campo magnético $\boldsymbol{H}$ influye en la estructura magnética de un antiferromagnético en el que los momentos magnéticos de las subredes $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, en ausencia de campo magnético, son antiparalelos:

$$\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}, \qquad (4.2)$$

y están dispuestos a lo largo del eje de anisotropía $\boldsymbol{n}$. Tales antiferromagnéticos se llaman antiferromagnéticos de tipo «eje ligero» (fig. 63, *a*). Para una simplificación complementaria consideraremos que el campo magnético también se aplica a lo largo del eje de anisotropía, es decir, a lo largo del «eje ligero» (campo longitudinal).

Esclarecer la estructura significa hallar las direcciones de los momentos magnéticos para las cuales su energía es mínima. Con el fin de anotar la energía del ferromagnético, partiremos de las consideraciones análogas a las que se han utilizado al analizar el modelo de Curie — Weiss (véanse las fórmulas (3.10) y (3.14)), suponiendo que la energía se determina totalmente por la magnitud y la dirección

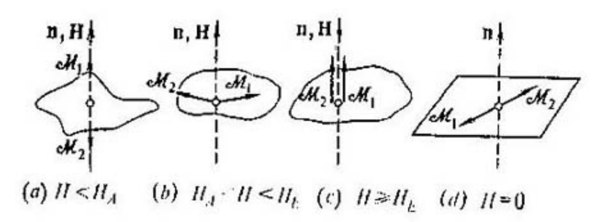


FIG. 63. *Dirección de equilibrio de los momentos magnéticos del antiferromagnético: a), b) y c) antiferromagnético de tipo «eje ligero»; d) antiferromagnético de tipo «plano ligero».*

de los momentos magnéticos de las subredes (a razón de la unidad de volumen). Omitiendo los sumandos que no dependen de la dirección de los vectores $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, tenemos

$$\mathscr{E} = \delta \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 - \frac{1}{2} \beta [(\mathcal{M}_1 n)^2 + (\mathcal{M}_2 n)^2] - \\ - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) H. \qquad (4.3)$$

Cada uno de los tres sumandos describe energías «diferentes»: el primero, la de intercambio (la constante de interacción de intercambio proporcional a la integral de intercambio está designada por la letra griega δ, cuando $\delta > 0$ es lógico que a los momentos magnéticos les convenga ser antiparalelos); el segundo sumando describe la energía de anisotropía (β es la constante de anisotropía, para los antiferromagnéticos de tipo «eje ligero» $\beta > 0$, y los momentos magnéticos se disponen a lo largo del eje de anisotropía n *)), y el tercero, la energía magnética, es decir, la energía de interacción de los momentos magnéticos con el campo magnético H (cuando los momentos magnéticos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son antiparalelos entre sí, la energía magnética es igual a cero).

La prioridad de la interacción de intercambio isótropo frente a la anisótropa se manifiesta en que $\delta \gg \beta$. Ambas constantes tienen dimensión nula por cuanto $\mathscr{E}$ es la densidad de la energía. Por el orden de su magnitud $\delta \approx |A|/\mu \mathcal{M}_0$;

*) Los antiferromagnéticos que tienen $\beta < 0$ se denominan antiferromagnéticos de tipo «plano ligero», ya que los momentos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, cuando $H = 0$, se encuentran en un plano perpendicular al vector n (fig. 63, *d*). Hemos simplificado un poco la anotación de la energía de la anisotropía, omitiendo el sumando $\beta' (\mathcal{M}_1 n)(\mathcal{M}_2 n)$. Éste, sin modificar mucho los resultados, los hace menos evidentes.

$\beta = 1$; μ, como siempre, es el magnetón de Bohr, y $\mathcal{M}_0$ representa aquí la magnitud de la magnetización de la subred lejos de la temperatura de Neel T_N que, al igual que en los ferromagnéticos, se determina por la integral de intercambio ($kT_n \approx | A |$). La evaluación de los parámetros δ y β coincide con la de los parámetros α y β en el caso de un ferromagnético (véanse las págs. 120 y 130). Subrayemos que en el antiferromagnético, la dirección de los momentos magnéticos se determina no solamente por la interacción anisótropa relativista, sino también por la interacción isótropa de intercambio que «trata» de orientar los momentos de la subred de un modo antiparalelo.

Es posible cerciorarse de que la disposición no simétrica de los momentos magnéticos respecto al eje de anisotropía n es desventajosa desde el punto de vista energético *). Por eso examinaremos sólo tres configuraciones representadas en la fig. 63, a, b y c y organizaremos entre ellas una especie de «competición». Escribamos, en primer lugar, las energías de estas configuraciones:

$$\mathcal{E}_{\uparrow\downarrow} = -(\delta + \beta)\mathcal{M}^2; \quad (4.4)$$

$$\mathcal{E}_{\cos} = \delta\mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta - \beta\mathcal{M}^2 \cos^2\vartheta - 2\mathcal{M}H \cos\vartheta; \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E}_{\uparrow\uparrow} = \delta\mathcal{M}^2 - \beta\mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M}\mathrm{H}. \quad (4.6)$$

De las designaciones adoptadas se ve claramente cuál de las fórmulas pertenece a cada configuración. Las fórmulas (4.4) y (4.6) son «definitivas», mientras que la (4.5) debe emplearse para hallar el ángulo ϑ que minimiza la energía $\mathcal{E}_{\cos}$. Es un problema para hallar el mínimo:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\cos}}{d\vartheta} = 2\mathcal{M}^2 \operatorname{sen}\vartheta \left[-(2\delta - \beta)\cos\vartheta + \frac{H}{\mathcal{M}} \right] = 0,$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_{\cos}}{d\vartheta^2} = -4\delta\mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta + 2\beta\mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta + {} + 2\mathcal{M}H\cos\vartheta > 0. \quad (4.7)$$

De acuerdo con las expresiones (4.7) la energía es extrema tanto para

$$\cos\vartheta = \frac{H}{H_E}, \qquad H_E = (2\delta - \beta)\mathcal{M}, \quad (4.8)$$

---

*) *Problema 28.* Demuestren (lo mejor de todo, sin recurrir a cálculos) que la disposición no simétrica de los momentos magnéticos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, cuando $H = Hn$, es inconveniente desde el punto de vista energético.

como para

$$\operatorname{sen} \vartheta = 0. \tag{4.9}$$

Puesto que $\cos\vartheta < 1$, la primera solución tiene sentido si $H < H_E$. Para los campos grandes existe tan sólo una solución (4.9), cuando ambos momentos magnéticos son *paralelos* entre sí. De la expresión para la segunda derivada se deduce que la estructura ↑↑, cuando $H > H_E$, corresponde al mínimo de energía: el campo magnético «superó la resistencia» de la interacción de intercambio, obligando los dos momentos magnéticos a «situarse» según el campo. La solución (4.8) minimiza la energía (4.5) si el campo magnético es menor que H_E. En este caso, la energía $\mathscr{E}_{\cos}$ adquiere el siguiente valor:

$$\mathscr{E}_{\cos} = -\mathscr{M}^2\delta - \frac{H^2}{2\delta-\beta}. \tag{4.5'}$$

Al comparar la energía $\mathscr{E}_{\cos}$ con la $\mathscr{E}_{\uparrow\downarrow}$ cuando la configuración es antiparalela, nos convencemos de que, cuando $H = H_A = \mathscr{M}\sqrt{\beta(2\delta-\beta)}$, las mismas se igualan; cuando $H < H_A$ la configuración ⇅ tiene menor energía, y cuando $H > H_A$, es más conveniente desde el punto de vista energético la configuración «cos» con momentos magnéticos casi perpendiculares al eje de anisotropía *), es decir, $\mathscr{E}_{\cos} < \mathscr{E}_{\uparrow\downarrow}$. El conocimiento de la relación entre la energía y el campo magnético permite calcular el momento magnético, en este caso, el momeno magnético del antiferromagnético que designaremos por $\mathfrak{M}$. Éste, al igual que el campo magnético, está orientado a lo largo del eje de anisotropía. Puesto que en la fase «cos» $\mathfrak{M}_{\cos} = -\dfrac{d\mathscr{E}_{\cos}}{dH}$, resulta que

$$\mathfrak{M}_{\uparrow\downarrow} = 0 \quad \text{para } H \leqslant H_A,$$

$$\mathfrak{M}_{\cos} = \frac{H}{\delta - \frac{\beta}{2}} \quad \text{para } H_A \leqslant H \leqslant H_E, \tag{4.10}$$

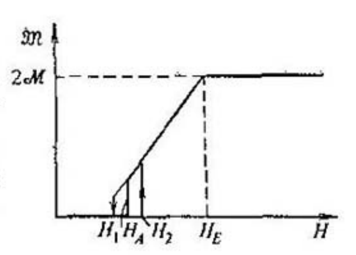
$$\mathfrak{M}_{\uparrow\uparrow} = 2\mathscr{M} \quad \text{para } H > H_E.$$

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{\beta}{2\delta-\beta}} \ll 1.$$

*) Por cuanto $\beta \ll \delta$, resulta que para $H = H_A$ el ángulo $\vartheta \approx \pi/2$. Efectivamente,

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{\beta}{2\delta-\beta}} \ll 1.$$

FIG. 64. *Variación del momento magnético del antiferromagnético de tipo «eje ligero» en función del campo magnético aplicado a lo largo del eje elegido. El ciclo de histéresis (la línea fina) refleja la existencia de estados metaestables en el intervalo de los campos (H_1 y H_2).*



En la fig. 64 se muestra el momento magnético en función del campo magnético. Se ve que el antiferromagnético experimenta dos transformaciones: cuando $H = H_A$ ocurre una nueva orientación brusca de los momentos magnéticos por medio de la transición de fase de primer género (el campo H_A lleva precisamente el nombre de *campo de orientación nueva*). Cuando $H = H_E$ la orientación nueva finaliza ya que el ángulo entre los momentos magnéticos de las subredes se reduce a cero, es decir, dichos momentos se sitúan paralelamente. Es una transición de fase de segundo género: el momento magnético es continuo, pero la susceptibilidad magnética varía a saltos. Cuando $H < H_A$ la fase «cos» es metaestable, y cuando $H > H_A$ resulta metaestable la fase $\uparrow\downarrow$. La existencia de estados metaestables conduce a la histéresis. El ancho del ciclo de histéresis (en la fig. 64 se muestra con una línea fina) se determina por los valores de los campos con los que las fases pierden la estabilidad (campos de inestabilidad): la fase $\uparrow\downarrow$ es estable mientras el campo magnético no alcance el valor de $H_2 = \sqrt{\beta(2\delta+\beta)}\mathcal{M}$ y la fase «cos», mientras $H > H_1 = H_2\frac{2\delta-\beta}{2\delta+\beta}$. Es fácil comprobar que

$$H_1 < H_A < H_2.$$

Por cuanto $\beta \ll \delta$, el ciclo de histéresis es muy estrecho en comparación con el campo de orientación nueva:

$$H_2 - H_1 = H_A \frac{2\beta}{\sqrt{(2\delta)^2-\beta^2}} \approx H_A \frac{\beta}{\delta} \ll H_A.$$

Lamentablemente, teniendo tan sólo configuraciones simétricas no se pueden calcular los campos de inestabilidad H_1 y H_2. Para conseguirlo sería necesario aclarar cómo la energía depende de las direcciones de los momentos magné-

ticos $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$ cuando éstos se hallan dispuestos asimétricamente.

El campo H_E con el que los momentos magnéticos se sitúan paralelamente, para la mayoría de los antiferromagnéticos es muy grande (el mismo es proporcional a la constante de intercambio δ, véase la fórmula (4.8)). Sin embargo, existen sustancias con interacción de intercambio anormalmente pequeña (por ejemplo, $MnBr_2 \cdot 4H_2O$, $MnCl_2 \cdot 4H_2O$) Estas sustancias pasan al estado antiferromagnético a temperaturas de cerca de 2 K. En tales sustancias se logra observar no sólo la nueva orientación de los momentos magnéticos (transición de fase de primer género cuando $H = H_A$), sino también cómo ellos se hacen paralelos (transición de fase de segundo género cuando $H = H_E$), con la que el antiferromagnético se «transforma» en ferromagnético.

Claro está que la fig. 64 es esquemática, ya que no refleja la «lucha» del campo magnético contra el caos de temperatura (más arriba hemos dicho que tal acción del campo magnético se llama paraproceso). Esa «lucha» se manifiesta con gran evidencia cuando el campo magnético es considerable ($H \gg H_E$). La consideración del paraproceso conduce a que cuando $H > H_E$ el momento magnético aumenta algo al incrementarse el campo magnético, y cuando $H < H_A$, el momento magnético, aunque es pequeño, no es igual a cero (en todo caso, cuando $T \neq 0$).

§ 3. LAS ONDAS DE ESPÍN SON MAGNONES EN EL ANTIFERROMAGNÉTICO

La dependencia de temperatura entre los momentos magnéticos de las subredes en las inmediaciones del punto de Neel T_N puede ser esclarecida valiéndose del modelo del campo autocongruente (véase la pág. 110), que es la generalización del modelo de Curie — Weiss para el caso de dos subredes. Sin embargo, como ya sabemos, a temperaturas bajas (cuando $T \ll T_N$) este modelo «no trabaja», llevando a errores considerables. Un resultado correcto puede obtenerse tan sólo sabiendo cómo se mueven los momentos magnéticos atómicos, es decir, conociendo el espectro de energía del antiferromagnético.

Los estados excitados del antiferromagnético pueden considerarse asimismo como se procedió para el ferromagnético: comenzar por el estado en que el espín de un átomo

aislado está desviado de su posición «correcta»; llegar a la conclusión de que tal estado no es estacionario; «construir» la onda de espín, etc. (cap. 3, § 7). Pero, por otra parte, sabemos que a temperaturas bajas: presentan gran interés las ondas de espín de longitud de onda grande en comparación con la distancia interatómica. Y, como hemos visto, tales ondas pueden interpretarse como una precesión no homogénea de magnetización (cap. 3, § 8). En el caso de ferromagnético con dos subredes tenemos también dos magnetizaciones: $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. Cada momento magnético realiza precesiones alrededor de su posición de equilibrio, sin embargo, debido a la interacción de intercambio, esas precesiones no son independientes.

Al igual que en el caso del ferromagnético, comencemos por el análisis de la precesión homogénea, además, describámosla para las tres configuraciones examinadas más arriba: $\uparrow\downarrow$, «cos» y $\uparrow\uparrow$. Por desgracia, tenemos que limitarnos precisamente a la descripción. La deducción de las correspondientes fórmulas requiere un nivel de conocimientos matemáticos algo más elevado que el que teníamos en cuenta al escribir este libro. En cuanto a la física, ésta es sencilla: sobre cada uno de los momentos magnéticos actúa un campo efectivo que depende de «otro» momento. Precisamente por esta razón las precesiones no son independientes.

Configuración $\uparrow\downarrow$ $(H < H_A)$. El movimiento de dos momentos magnéticos se descompone en la suma de dos movimientos periódicos independientes. En cada uno de éstos participan ambos momentos. Las frecuencias de dichos movimientos (precesiones) designémoslas por ω_+ y ω_-. El análisis demuestra que

$$\omega_\pm = \gamma (H_2 \pm H), \quad H_2 = \sqrt{\beta (2\delta + \beta)}\, \mathcal{M} \qquad (4.11)$$

donde γ es la relación giromagnética (véase la pág. 41).

La fig. 65, *a* ilustra la precesión de los momentos magnéticos de la subred en cada uno de los dos movimientos. En el movimiento cuya frecuencia es ω_+, el momento orientado en dirección del campo (en la figura se designa con $\mathcal{M}_1$) está desviado del eje un poco más que el otro ($\mathcal{M}_2$) dirigido en contra del campo; en el movimiento cuya frecuencia es ω, todo sucede al revés. Presten atención al hecho de que cuando $H = H_2$ la frecuencia de precesión se reduce a cero, lo que sirve de *indicio de inestabilidad*.

Configuración «cos» $(H_A < H < H_E)$. El giro de los momentos magnéticos (sin cambiar el ángulo entre ellos)

1/2 13—1598

alrededor del campo magnético, paralelamente al eje elegido, no modifica el estado del antiferromagnético: éste resulta degenerado respecto a la posición del plano en el que están dispuestos los momentos magnéticos. Debido a ello, la frecuencia relacionada con ese movimiento es igual a cero. Dicha circunstancia puede provocar asombro. Al parecer, tal sistema de momentos magnéticos puede girar con cualquier frecuencia, sin embargo, resulta que la misma, esta frecuencia, es igual a cero.

La aplicación de los conceptos mecanocuánticos hace más comprensible este enunciado. Supongamos que la frecuencia de oscilación del sistema de momentos magnéticos, sin que varíe el ángulo entre éstos, se diferencia de cero y es igual a Ω. Entonces con el movimiento en cuestión se hallan relacionados los niveles de energía $\hbar\Omega\,(n + 1/2)$. Pero el giro del plano en el que se encuentran los momentos magnéticos no modifica la energía del sistema. Por lo tanto, $\Omega = 0$. Esperamos que ahora no habrá reproches.

La precesión de los momentos magnéticos cuando se trata de un movimiento cuya frecuencia se distingue de cero, se representa en la fig. 65, *b*. En esta misma figura también se muestra la precesión del momento magnético total $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. La frecuencia de este movimiento crece con el incremento del campo magnético H. Cuando $H = H_1$ la misma es igual a cero, atestiguando la inestabilidad de la configuración «cos», y cuando $H = H_E$ coincide con la frecuencia de precesión del ferromagnético con el

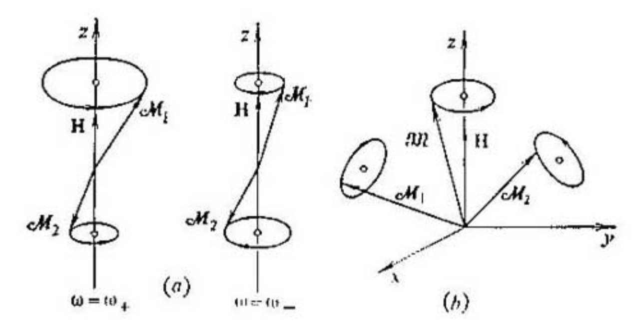


FIG. 65. *Precesión de los momentos magnéticos de las subredes del antiferromagnético de tipo «eje ligero» (el campo magnético está orientado en dirección del eje de anisotropía): a) $H < H_A$; b) $H_A < H < H_E$.*

momento magnético igual a $2\mathcal{M}$, tal y como debe ser en la configuración ferromagnética.

La fig. 66 ilustra la relación (descrita más arriba) entre las frecuencias de una precesión homogénea y el campo magnético H.

El curso ulterior de los razonamientos coincide, naturalmente, con el que hemos «seguido» en el § 8 del capítulo 3. El paso de la precesión homogénea a la no homogénea conduce a que la frecuencia de la precesión dependa del vector de onda k. Y luego, siguiendo el esquema conocido, otra vez tenemos:

onda → oscilador → cuasipartícula.

Al igual que en el ferromagnético, las cuasipartículas llevan el nombre de magnones (menos a menudo, antiferromagnones). Como es lógico, al pasar de la onda a la cuasipartícula hemos utilizado las relaciones de de Broglie: el impulso del magnón constituye $\hbar k$, y su energía $\hbar\omega$. Cuando $H < H_A$ (aquí nos limitamos a este caso) en el antiferromagnético de dos subredes existen dos tipos de magnones. La relación entre su energía y el impulso es algo más compleja que la de los magnones del ferromagnético. Cuando el impulso es pequeño, entonces

$$\varepsilon \pm (p) = 2\mu\,[H_2^2 + (H'_E a k)^2]^{1/2} \pm 2\mu H, \qquad (4.12)$$

donde $2\mu = \hbar\gamma$; a es la constante de la red cristalina. El factor de k^2 está escrito de modo que sea evidente su orden de magnitud ($H'_E \approx H_E \gg H_2$) y su origen, pues él se halla condicionado por la interacción de intercambio. Notemos que la existencia de los sumandos $\pm 2\mu H$ en las expresiones (4.12) no concede el derecho de interpretar ε^+ y ε^- como las energías de dos de tres estados de una partícula con espín 1 (compárese con la pág. 154). Estos

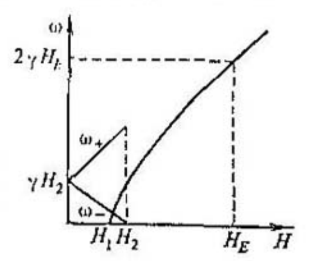


FIG. 66. *Variación de las frecuencias de precesión del antiferromagnético de tipo «plano ligero» en función del campo magnético. El campo magnético es paralelo al eje de anisotropía.*

sumandos se refieren a distintos magnones. *Cada uno de los magnones del antiferromagnético es una cuasipartícula con espín* 1, pero de tres estados de espín posibles se realiza tan sólo uno para cada magnón (para uno, $s_z = -1$, y para otro, $s_x = +1$). Al igual que los magnones en el ferromagnético,

los magnones en el antiferromagnético son bosones.

La fórmula (4.12) muestra cómo está estructurado el espectro de energía de los antiferromagnéticos. Los primeros estados de excitación permanecen separados —mediante una ranura— del estado fundamental. Cuando $H = 0$ esa ranura es grande (en todo caso, en comparación con el ferromagnético), puesto que depende no sólo de la constante de anisotropía β, sino también de la gran constante de intercambio δ (véase 4.11)). Es verdad que cuando $H = H_2$ la ranura se anula, pero «antes» (cuando $H < H_2$) antiferromagnético de tipo «eje ligero» se reestructurará (véase el párrafo anterior).

El conocimiento de la energía de los magnones en función de sus impulsos y sus propiedades estadísticas (o sea, de que son bosones) permite calcular la dependencia de temperatura del momento magnético total y de la capacidad calorífica. Está claro que si la temperatura tiende al cero absoluto, los números de magnones tenderán a cero exponencialmente (¡ranura!), lo cual, como es natural, se reflejará en la variación de las características del antiferromagnético en función de la temperatura. No tenemos la posibilidad de detenernos detalladamente en esta circunstancia, en particular, también por el motivo de que los vaticinios teóricos expuestos a base de los conceptos acerca de los magnones, en el caso de los antiferromagnéticos no encuentran una confirmación experimental tan feliz como en el caso de los ferromagnéticos. La causa reside, precisamente en las grandes dimensiones de la ranura: la aportación de los magnones en demasiado pequeña para que pueda descubrirse con seguridad.

Comparando los magnones en los ferro y antiferromagnéticos cabe señalar una particularidad interesante. El desprecio de las fuerzas anisótropas y de la interacción del magnón con el campo magnético hace que el magnón en el ferromagnético sea muy parecido a una partícula ordinaria de masa $m^* = \hbar^2/2A^2$ (véase la fórmula 3.25)). Efectuemos esa misma operación con el magnón en el antiferromagnético.

En la fórmula (4.12) supongamos que $H = 0$ y «desconectemos» las fuerzas anisótropas (es decir, hagamos que H_2 tienda a cero). En este caso la dependencia entre la energía del magnón y el impulso se simplifica considerablemente:

$$\varepsilon \pm (p) = c^* p; \quad c^* = \frac{2\mu H'_E a}{\hbar}. \tag{4.13}$$

Ésta se parece a la dependencia que existe entre el impulso y la energía del fonón. La velocidad del magnón c^* se determina por la interacción de intercambio. La fórmula (4.13) es aplicable no para todos los valores de los impulsos, su aplicabilidad se halla limitada por la condición

$$\frac{H_2}{H'_E} \ll \frac{ap}{\hbar} \ll 1. \tag{4.13'}$$

No obstante, si $H_2 \ll H'_E$ existe una región de temperaturas ($2\mu H_2 \ll kT \ll 2\mu H'_E$) en la que se puede utilizar la fórmula «cuasifonónica» (4.13). A estas temperaturas la aportación de los magnones a las magnitudes termodinámicas de los antiferromagnéticos es muy parecida a la de los fonones. Por ejemplo, la capacidad calorífica magnónica en estas condiciones es proporcional a T^3, igualmente la fonónica (véase la pág. 178).

Hemos tratado de describir los antiferromagnéticos y sus propiedades casi sin recurrir a la mecánica cuántica. Y en la pág. 181 (en la nota) hemos dicho, sin ambages, que no existe una teoría mecanocuántica estricta.

El hecho es que el estado de espines antiparalelos en diferentes subredes no es en realidad un estado estacionario del antiferromagnético, descrito por el hamiltoniano de Heisenberg (3.8) o (3.8'). La forma más fácil de comprender que eso es precisamente así, consiste en analizar el sistema de espines con $s = 1/2$. Supongamos que en cierto nudo de la red cristalina el espín está dirigido hacia arriba. Entonces —en el estado sujeto a investigación— en los nudos vecinos al primero y pertenecientes a otra subred, los espines permanecerán dirigidos hacia abajo. Según el propio sentido de la interacción de intercambio, su papel en el caso de $s = 1/2$ se reduce al cambio de posición de los electrones en los nudos vecinos. Al producirse tal cambio se trastornará la alternancia de los átomos y los espines dirigidos hacia arriba y hacia abajo: aparecerán parejas de

átomos vecinos con espines dirigidos igualmente, o sea, el estado cambiará. No obstante, con tal cambio no debe variar la función de onda del estado estacionario, ésta tan sólo se puede multiplicar por cierto número, es decir, por el valor de la energía en estado estacionario. Por consiguiente, si el estado que acabamos de analizar no es estacionario, entonces, el verdadero estado fundamental debe ser otro, en cierto modo. Es una afirmación absolutamente correcta (¡es tan correcta, como trivial!). El quid de la cuestión radica en ¿cuál es el estado fundamental? ¿Qué función de onda tiene? ¿Qué energía? Hasta la fecha no hay respuesta a estas preguntas? Nadie todavía ha logrado hallar el estado fundamental de un antiferromagnético *tridimensional*. Para un antiferromagnético unidimensional, en el que la interacción se realiza a lo largo de una línea *), todavía en 1931 H. Bethe halló (calculó) la energía del estado fundamental. Claro está que la misma se diferencia de la energía «clásica» de dos subredes con espines de orientación opuesta. Sin embargo, hasta la fecha no se logró generalizar este resultado para los casos bi y tridimensionales.

El resultado hallado por Bethe se refiere al sistema de átomos con espines $s = 1/2$. Cuanto mayor es s, tanto menos deben divergir los resultados del cálculo clásico (mejor dicho, semiclásico, ya que la propia interacción es un efecto cuántico) y del cuántico exacto. Cuando $s \gg 1$ la cuantificación espacial de los espines deja de tener importancia y el espín se torna momento clásico que varía tan sólo por su dirección. Hablando en rigor, los resultados antes descritos son válidos precisamente para el sistema que consta de espines «clásicos». Para no finalizar en una nota tan triste, hagamos constar que el eclecticismo de la teoría de los antiferromagnéticos a bajas temperaturas (el carácter semiclásico del estado fundamental y el enfoque mecanocuántico empleado para la investigación del espectro de energía) no pone trabas a los intentos (¡a menudo bastante acertados!) de explicar e interpretar un amplio conjunto de datos experimentales: termodinámicos, cinéticos, de alta frecuencia, en particular, ópticos. La «estructura» real de los antiferromagnéticos es, a todas luces, próxima a la descrita. Tal observación no debe menoscabar la importancia de la creación de una teoría rigurosa.

*) Hoy día los sistemas uni y bidimensionales atraen considerablemente la atención de los físicos.

§ 4. ¿CÓMO "VER" UN MAGNÓN AISLADO?

Esperamos que después de haber leído sobre los magnones en los ferromagnéticos y antiferromagnéticos el lector se sienta lleno de respeto hacia estas cuasipartículas. El conocimiento de sus propiedades (en particular, de la relación entre la energía del magnón y su cuasiimpulso) da la posibilidad de determinar las propiedades de los magnéticos y comparar nuestras construcciones teóricas con los datos del experimento. Pero también es posible proceder de otra manera: basándose en los datos experimentales y valiéndose, claro está, de ciertas concepciones generales acerca del espectro de energía, tratar de esclarecer qué son los magnones como tales. Compongamos el siguiente esquema lógico. De la experiencia se conoce que, para los ferromagnéticos, la desviación $\Delta\mathcal{M}$ del momento magnético espontáneo respecto a su valor cuando $T = 0$, es proporcional a $T^{3/2}$ (compárese con la fórmula 3.40)). La desviación $\Delta\mathcal{M}$ del momento magnético $\mathcal{M}$ respecto a la saturación, está relacionada con la existencia de magnones. Éstos son bosones. De aquí, con arreglo a las leyes de la estadística, se deduce que la energía del magnón es proporcional al cuadrado del impulso. Más aún, el coeficiente de proporcionalidad entre $\Delta\mathcal{M}$ y $T^{3/2}$ permite calcular la masa efectiva del magnón *).

El método de estudio de las cuasipartículas (no sólo de los magnones) según las dependencias de temperatura de las magnitudes termodinámicas está muy difundido. Se ha formulado incluso un procedimiento matemático que da la posibilidad de restablecer, basándose en la dependencia entre la capacidad calorífica del cuerpo y la temperatura, la densidad del número de cuasipartículas —bosones en una amplia gama de energías. Pero el físico siempre sueña con aislar el objeto de investigación. Al estudiar los electrones es mejor operar con un electrón, y al estudiar los magnones, con un magnón.

Calculemos aproximadamente (evaluemos con arreglo al orden de magnitud) cuántos magnones «aseguran» la desviación del momento magnético de la saturación en 1 %. De acuerdo con la fórmula (3.39)

$$\frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}} \simeq \frac{N_{\text{magn}}}{N},$$

*) *Problema 29.* Comprueben que la fórmula (3.40) no contradice la definición de la masa efectiva del magnón, dada en la pág. 154.

es decir, $N_{magn}/N = 10^{-2}$. Por consiguiente, $N_{magn} = 10^{-2} \cdot N \approx 10^{20}$ (¡!) en un centímetro cúbico. En cierto sentido son pocos en comparación con el número de átomos magnéticos, pero en sentido absoluto (en comparación con la unidad) su cantidad es macroscópicamente grande. Se puede, claro está, reducir la temperatura (recordemos que $N_{magn} \sim T^{3/2}$). El número de magnones disminuirá, pero de todos los modos se mantendrá grande, macroscópico. Es una buena circunstancia, pues de lo contrario no podríamos utilizar las fórmulas deducidas para el gas de Bose, o sea, para el sistema de un número macroscópico de partículas de Bose. En este sentido está bien, pero no perdemos la esperanza de aislar un magnón por medio de reducir la temperatura. Para investigar magnones aislados se emplean métodos y procedimientos completamente diferentes, basados en la interacción de resonancia de la radiación penetrante con magnones.

El término «radiación penetrante» es muy convencional: es «algo» que puede penetrar a bastante profundidad en el cuerpo sometido a investigación (por ejemplo, una onda electromagnética o sonora, un neutrón). No obstante, los rasgos principales de los métodos serán comprensibles después de citar varios ejemplos.

RESONANCIA FERROMAGNÉTICA

Cuando caracterizábamos la resonancia paramagnética electrónica (pág. 82), examinábamos la posibilidad de interacción de resonancia de la onda electromagnética con momento magnético de precesión. Pero no sólo el momento

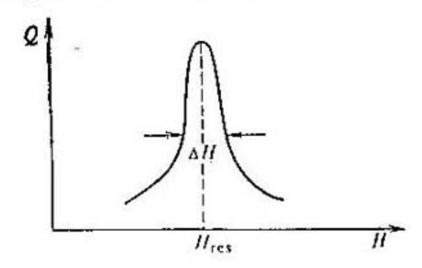


FIG. 67. *La variación de la energía absorbida por el ferromagnético, en función del campo magnético permanente, reviste carácter de resonancia; ΔH es el ancho de la curva de resonancia.*

magnético del átomo puede realizar precesiones, sino también el momento magnético medio del cuerpo, claro, si este último posee tal momento. El ferromagnético dispone de momento magnético y él puede realizar precesiones (véase § 8, cap. 3). Por consiguiente, si la frecuencia de la onda electromagnética coincide con la de precesión, ha de comenzar la resonancia, que será revelada debido al brusco acrecentamiento de la energía electromagnética absorbida por el ferromagnético (fig. 67). Por regla general, el experimento se efectúa de tal modo que la frecuencia de la onda electromagnética (se trata de ondas de la gama de radiofrecuencia) no varíe en el curso del experimento, pero que varíe el campo magnético aplicado al material magnético. Sabemos que la frecuencia de precesión ω_0 depende del campo magnético H. Si la frecuencia de la onda magnética ω se ha elegido correctamente, entonces, con cierto valor del campo magnético, las frecuencias coincidirán y surgirá resonancia: $\omega = \omega_0 (H)$.

Por otra parte, *la frecuencia de precesión homogénea del momento magnético* ω_0, con una exactitud de hasta la constante de Planck, *es la energía del magnón en reposo* ε_0. Esta circunstancia obliga a «enfocar» la resonancia ferromagnética desde el punto de vista cuántico. La condición de resonancia, después de multiplicar por la constante de Planck, adquiere la forma de igualdad de la energía del fotón $\hbar\omega$ a la energía del magnón en reposo

$$\hbar\omega = \varepsilon_0, \tag{4.14}$$

y significa que con la resonancia el fotón se transforma en magnón:

fotón → magnón.

Está claro que en este caso deben obedecerse las leyes de conservación de la energía y el impulso. Esta ley ha sido anotada (véase (4.14)). ¿Y qué pasa cuando se trata de la ley de conservación del impulso? Pues el fotón tiene un impulso que constituye *) $\hbar\omega/c$. ¿Es necesario considerar esta circunstancia? Por cuanto a la resonancia le corresponde la transformación del fotón en magnón, es decir, la elimina-

*) La dependencia entre la energía del fotón $\varepsilon = \hbar\omega$ y el impulso es $\varepsilon = cp$, donde c es la velocidad de la luz. Efectivamente, $\omega = 2\pi c/\lambda$ (λ es la longitud de onda); multiplicando por $\hbar$ obtendremos la igualdad escrita, puesto que $2\pi\hbar/\lambda = p$ de acuerdo con las relaciones de de Broglie.

14—01598

ción de una cuasipartícula y la aparición de otra, ambas leyes de conservación se reducen a la igualdad de las energías del magnón y del fotón con un mismo impulso: $\varepsilon_0 + p^2/2m^* = cp$, donde m^* es la masa efectiva del magnón. Como $cp = \hbar\omega$, entonces

$$\varepsilon_0 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2m^*c^2} = \hbar\omega. \qquad (4.15)$$

Resultó una igualdad más compleja que (4.14). Sin embargo, antes de sacar conclusiones es necesario apreciar el sumando complementario obtenido $(\hbar\omega)^2/2m^*c^2$, comparándolo con ε_0. Supongamos que el mismo es muy pequeño (inmediatamente comprobaremos esta suposición). Entonces, $\hbar\omega \approx \varepsilon_0$. Apreciemos el segundo sumando en el primer miembro de la ecuación (4.15): $(\hbar\omega)^2/2m^*c^2\varepsilon_0 \approx \varepsilon_0/2m^*c^2$. Se ve que la magnitud de la relación que nos interesa depende del valor del parámetro $v_0 = (\varepsilon_0/2m^*)^{1/2}$ que tiene dimensión de velocidad (la de la luz la conocemos). Para apreciar v_0 hay que evaluar la masa efectiva del magnón m^* (véase la pág. 154). Considerando que $a \approx 3\cdot 10^{-8}$ cm y $A = kT_c$ ($k \approx 1{,}4\cdot 10^{-16}$ ergios/grado), tenemos

$$\overline{\overline{m}}^* \approx \frac{\hbar}{Aa^2} \approx m_e \frac{10^2}{T_c,\ K}. \qquad (4.16)$$

La masa del electrón $m_e \approx 10^{-27}$ se ha introducido en esta fórmula para facilitar las evaluaciones. Se ve que si $T_c \approx 10^2$ K., el magnón tiene una masa efectiva próxima a la del electrón.

La velocidad v_0 depende esencialmente de la magnitud ε_0. Supongamos que al ferromagnético se ha aplicado un campo grande *) $H = 10^4$ Oe; entonces, $\varepsilon_0 = 2\mu H$. Pero de acuerdo con la evaluación (2.7) a tal campo le corresponde la energía kT cuando $T = 1$ K. De aquí $\varepsilon_0 \approx 10^{-16}$ ergios y $v_0 \approx 3\cdot 10^5$ cm/s cuando $T_c \approx 10^2$ K. A primera vista la velocidad parece ser grande, pero resulta ínfima en comparación con la de la luz: $v_0^2/c^2 \approx 10^{-10}$. Está claro que el segundo sumando en la igualdad (4.15) puede omitirse ya que no hay necesidad de tener en cuenta el impulso del fotón. «¿Y la segunda raíz de la ecuación (4.15)?» —oímos la pregunta del lector atento. Ésta no se debe tomar en consideración por cuanto la expresión de la energía del

*) En un campo tan grande, el papel de la energía de la anisotropía, como regla, no es importante.

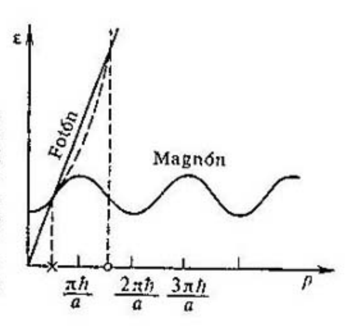


FIG. 68. *Solución gráfica de la ecuación $\varepsilon(p) = cp$. La raíz se indica con una cruz. Cuando es real la variación de la energía del magnón ε en función del impulso p, la segunda raíz no existe. Ésta aparece cuando la variación real de la energía del magnón en función del impulso es sustituida por la variación cuadrática.*

magnón que hemos utilizado, es válida tan sólo con impulsos pequeños (la situación es aclarada en la fig. 68).

Nos hemos detenido tan detalladamente en la interacción del magnón con el fotón para hacer algunas observaciones generales:

—las cuasipartículas que existen en los cristales, por regla general, se mueven con relativa lentitud: su velocidad es mucho menor que la de la luz;

—la resonancia ferromagnética no es un caso único de transformación del fotón en cuasipartícula; en los antiferromagnéticos es posible la resonancia antiferromagnética, o sea, la transformación del fotón en antiferromagnón *); en muchos cristales es posible la transformación del fotón en fonón óptico **), etc.

—la velocidad insignificante de las cuasipartículas, en comparación con la velocidad de la luz ($v \ll c$), conduce a que el fotón siempre se transforma en cuasipartícula «en reposo» (y aun así, esta transformación es posible en el caso de que energía de la partícula sea distinta a cero).

Así pues, la resonancia ferromagnética (o antiferromagnética) permite ver un magnón aislado, pero, lamentablemente, tan sólo el que se encuentra en reposo (cuando $p = 0$). Es verdad que la información obtenida a base del estudio de la resonancia no se limita a su registro, es decir, a la medición de la energía del magnón con impulso nulo.

---

*) *Problema 30.* Hallar la condición de resonancia antiferromagnética para un antiferromagnético de dos subredes de tipo «eje ligero» en sus tres configuraciones. ¿Puede haber resonancia en una configuración antiparalela?

**) Los fonones ópticos son cuasipartículas que corresponden a tales ondas en los cristales complejos, para las cuales los átomos pertenecientes a una celdilla elemental oscilan unos respecto a otros.

Como la observación de la resonancia significa la medición del valor del campo magnético con el que aparece esta resonancia, dicha circunstancia da la posibilidad de establecer la relación entre la frecuencia de precesión homogénea y el campo magnético (determinar γ, esclarecer el papel de la energía de anisotropía, etc.). Además —y esto es, tal vez, lo más importante— la investigación de la curva de resonancia (fig. 67) permite *apreciar el tiempo de vida del magnón* τ. Como ilustra la fig. 67, la absorción de energía (transformación fotón → magnón) es posible no sólo con la igualdad estricta de las frecuencias, sino también en cierto intervalo $\Delta\omega_0 = \gamma\, \Delta H$, como si la energía del magnón no estuviera prefijada con gran precisión, teniendo un valor para unos magnones, y algo distinto para otros (para simplificar, la energía del fotón se considera estrictamente determinada). Lo mismo se puede decir empleando la «terminología cuántica» (véanse las págs. 28—30): *la energía del magnón no tiene un valor determinado*. La mecánica cuántica afirma que la energía de un estado tiene valor determinado tan sólo en el caso de que ese estado sea *estacionario*, es decir, que, perdure un tiempo infinitamente largo. Pero si el estado no es estacionario, entonces existe una relación parecida a la relación de indeterminación

$$\Delta\varepsilon \cdot \tau \gtrsim \hbar \text{ o bien } \tau\, \Delta\omega \gtrsim 1, \qquad (4.17)$$

donde $\Delta\varepsilon$ es la indeterminación de la energía de estado, y τ, su *tiempo medio de vida* (de existencia).

¿Por qué, pues, el magnón no vive eternamente? ¿Qué es lo que limita su tiempo de vida? En el § 7 del capítulo 3 ya hemos hablado algo de eso: los magnones chocan unos con otros. Además, pueden chocar con los fonones que siempre están presentes en los cristales. Considerando que el magnón es una partícula (omitiendo el prefijo «cuasi»), es fácil concebir que el mismo se disipa al tropezar con toda clase de obstáculos que, prácticamente, siempre existen en los cristales: átomos extraños, los límites de los cristalitos, las dislocaciones (así se denominan los bordes de los planos atómicos rotos) y, simplemente, los bordes de la muestra. Como vemos, hay muchas causas que reducen la vida de los magnones. Todas ellas, en su conjunto, llevan el nombre de *procesos disipativos* («dissipare» en latín significa disipar). Así pues.

la resonancia ferromagnética es un método de estudio de los procesos disipativos con la participación de magnones.

El deseo de «ver» los magnones valiéndose de los métodos de resonancia, infunde la idea de elegir ondas que se «muevan» más lentamente que las electromagnéticas. Nosotros disponemos de tales ondas. Se trata de las ondas sonoras cuya velocidad es centenares de miles de veces menor que la de la luz. Si no podemos «ver» los magnones trataremos de «oirlos».

Como resultado de la interacción de resonancia, el fonón puede transformarse en magnón. Con tal transformación, la ecuación que describe las leyes de conservación de la energía y el impulso, se diferenciará de la (4.15) tan sólo en que la velocidad de la luz c se halla sustituida por la velocidad del sonido c_{son}. Puesto que $c_{son} \approx 10^5$ cm/s, esta circunstancia cambia radicalmente la situación. Para mayor sencillez, consideremos que $\varepsilon_0 = 2\mu H$ (por ejemplo, la energía de anisotropía es anómalamente pequeña) y busquemos el valor del campo magnético con el que es posible la interacción de resonancia (campo de resonancia):

$$2\mu H = \hbar\omega - \frac{(\hbar\omega)^2}{2m^* c_{son}^2}. \qquad (4.18)$$

El segundo miembro como función de $\hbar\omega$ tiene un máximo para $\hbar\omega = m^* c_{son}^2$ y se reduce a cero cuando $\hbar\omega = 2m^* c_{son}$ (fig. 69). Está claro (al analizar la figura) que la resonancia es posible si $2\mu H < 1/2m^* c_{son}^2$ ($m^* c_{son}^2/2$ es el valor del segundo miembro de la (4.18) en el máximo), siendo $\hbar\omega < 2m^* c_{son}^2$. Si la frecuencia del sonido y el campo magnético son tales que el campo de resonancia depende esencialmente del segundo sumando en la (4.18), entonces, valiéndose de la condición de resonancia se puede medir la masa efectiva del magnón m^* («oir» el magnón en movimiento).

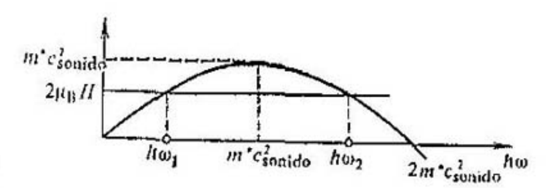


FIG. 69. *Solución gráfica de la ecuación (4.18): ω_1 y ω_2 son las frecuencias de resonancia cuando $2\mu H < m^* c_{son}/2$.*

En los dos métodos expuestos anteriormente, el «agente investigador» (el fotón o el fonón) perece, y su muerte es testimonio de la resonancia. ¿Acaso no existen métodos más «pacíficos» para obtener datos sobre la cuasipartícula? Tales métodos existen. Ellos se basan en la dispersión inelástica de los neutrones o fotones. Llámase dispersión *inelástica* cuando la partícula cambia su energía al interaccionar con el «dispersador».

Analicemos otra vez la dispersión de los neutrones por el ferro o antiferromagnético (véase el § 1 de este capítulo). El neutrón tiene muchas posibilidades de cambiar su energía. Cada una se caracteriza por su probabilidad. También existe la probabilidad de que el neutrón no cambie en general su energía. Sabemos que la dispersión sin variación de la energía (dispersión elástica) proporciona, en condiciones adecuadas, datos acerca de la estructura magnética del cristal.

Existe una probabilidad finita de que el neutrón, al pasar por encima del ferro o antiferromagnético, emita (absorba) una onda de espín o, recurriendo al lenguaje corpuscular, engendre (absorba) un magnón. El cálculo de la probabilidad de diversos procesos de dispersión es un problema complejo de la mecánica cuántica (no expondremos las fórmulas correspondientes incluso sin su deducción). Pero podemos aclarar la *principal* posibilidad de que el neutrón engendre o absorba un magnón, considerando, con plena razón, que si las leyes de conservación admiten tal proceso, éste tendrá lugar. Por lo tanto, resulta que si el neutrón engendra o absorbe un magnón, entonces deben observarse las leyes de conservación de la energía y el impulso. Designemos por p_n y p'_n el impulso del neutrón antes y después de la dispersión, respectivamente. La energía del neutrón es $\varepsilon_n = p_n^2/2m_n$. El impulso y la energía del magnón son p y $\varepsilon(p)$, respectivamente. Entonces

$$\frac{p_n^2}{2m_n} \pm \varepsilon(p) = \frac{p_n'^2}{2m_n}, \qquad p'_n = p_n \pm p.$$

Ambas leyes de conservación pueden escribirse en forma de ecuación que, a decir verdad, contiene vectores (para que sea claro hemos elegido la absorción de un magnón):

$$\frac{p_n^2}{2m_n} + \varepsilon(p) = \frac{(p_n + p)^2}{2m_n}. \qquad (4.19)$$

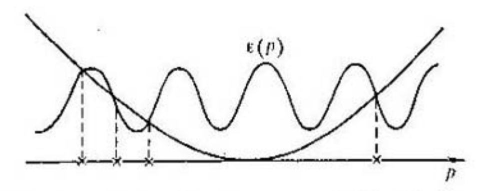


FIG. 70. *Solución gráfica de la ecuación (4.19). Conforme al eje de abscisas se traza el impulso del magnón a lo largo de la «buena» dirección. Las raíces de la ecuación se indican con cruces.*

Queremos aclarar si dicha ecuación tiene solución. Si tiene, entonces el proceso está permitido. La forma más simple de saber si existen soluciones (éstas, por lo general, pueden ser varias) es analizar la fig. 70. Pero si existen soluciones, este método ofrece posibilidades directas de medir la energía del magnón en función de su cuasiimpulso. Con este fin es necesario medir independientemente la variación del impulso del neutrón (ésta es igual al cuasiimpulso del magnón p), así como la variación de la energía del neutrón (ésta es igual a la energía del magnón $\varepsilon(p)$). Existen muchos métodos ingeniosos de realización de esta idea. Los datos principales sobre los magnones de los ferro, ferri y antiferromagnéticos se obtuvieron precisamente gracias a la investigación (en éstos) de la dispersión inelástica de los neutrones.

En los últimos años a la investigación de los magnones se incorporaron los ópticos. Se sintetizaron magnéticos transparentes. La amplia aplicación de láseres —fuentes de luz coherente— en la experimentación física permitió investigar la dispersión inelástica de fotones por tales magnéticos. El origen o la absorción del magnón transcurre con la variación de la frecuencia del fotón (la energía de este último es proporcional a su frecuencia). Tal efecto puede ser detectado por la variación del color del rayo luminoso.

Los datos sobre los magnéticos, que pueden obtenerse de los experimentos relacionados con la dispersión inelástica, no se limitan a la dependencia que existe entre la energía de los magnones y su cuasiimpulso. Al igual que en las investigaciones de resonancia, se pueden averiguar muchos detalles interesantes acerca de los procesos disipativos con la participación de magnones.

Al narrar sobre una rama de la ciencia que vive activamente es muy difícil poner el punto final. Parece como si se interrumpiese la conversación en la mitad de la palabra. Lo que nos consuela es que nos hemos planteado un problema completamente determinado: el de contar acerca de la *naturaleza de los fenómenos magnéticos*, y abrigamos la esperanza de que hemos cumplido nuestra misión. El relato sobre los fenómenos magnéticos puede continuar infinitamente. Por lo visto, el lector ha comprendido que las propiedades magnéticas de los cuerpos se hallan íntegramente relacionadas con su estructura microscópica y pueden ser entendidas tan sólo después de concebir con evidencia la estructura y la composición de los cuerpos, así como las fuerzas que actúan entre los átomos, las moléculas y los iones. A veces (pero no siempre, ni mucho menos) las propiedades magnéticas parece como si se aislaran: ellas pueden ser examinadas sin pensar en la estructura de las partículas microscópicas. Así aparece el modelo del gas de agujas magnéticas con todas las consecuencias que de éste derivan. Aunque se conozcan las partículas microscópicas y sus propiedades no es fácil «componer» el cuadro macroscópico. Muchas veces tuvimos que recurrir a la física estadística. Es posible que aquellas páginas en las que operamos con los conceptos de la física estadística sean las más difíciles de comprender y las menos evidentes.

Comprendiendo eso hemos tratado de ayudar al lector esclareciendo el material. No sabemos hasta qué punto acertamos en nuestro propósito.

Y, para finalizar, exponemos la última observación: hablando con los lectores hemos tratado de explicar solamente aquello que podíamos esclarecer disponiendo de medios limitados. No siempre hemos subrayado esa circunstancia. Quisiéramos que nuestro libro despertase el afán de saber cómo se explican los hechos y las propiedades cuya comprensión requiere conocimientos más profundos, es decir, que despertase el deseo de obtener estos conocimientos.

CLAVE PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Problema 1 (pág. 12). La fuerza que atrae a la Tierra el cuerpo de masa m es igual, por una parte, a gm, donde $g \approx 9{,}8$ m/s², y, por otra parte, a $\gamma m M_{\text{Tierra}}/R^2_{\text{Tierra}}$, donde M_{Tierra} es la masa de la Tierra, y R_{Tierra}, su radio. De aquí

$$g = \gamma \frac{M_{\text{Tierra}}}{R^2},$$

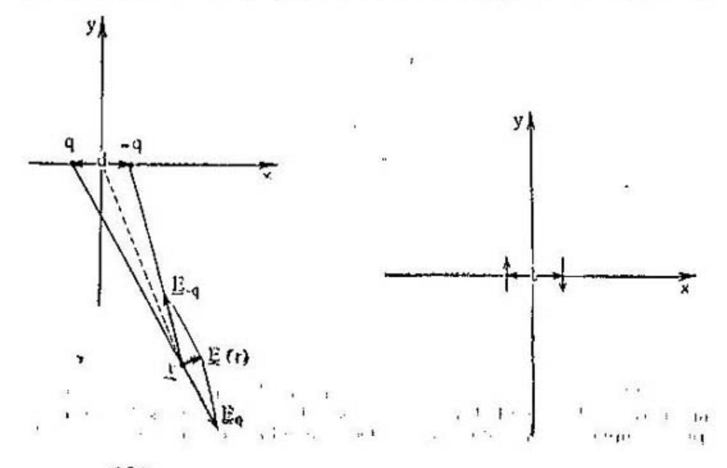
o bien

$$\gamma = \frac{gR^2_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Tierra}}}.$$

Puesto que $R_{\text{Tierra}} \approx 6400$ km y $M_{\text{Tierra}} \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg, resulta que $\gamma \sim 6{,}4 \cdot 10^{-8}$, lo que se encuentra en una correspondencia bastante buena con el valor más exacto insertado en el texto.

Problema 2 (pág. 17). La figura 71 explica cómo debe calcularse el campo $E(r)$. El vector r está trazado del centro de la recta que une dos cargas. $E_q(r)$ ($E_{-q}(r)$) es la intensidad del campo eléctrico en el punto r, creada por la carga q ($-q$). El plano (x, y) está trazado a través del punto de observación y la recta donde se encuentran las cargas. La adición de los vectores $E_q(r)$ y $E_{-q}(r)$ debe llevarse a cabo de acuerdo con la regla del paralelogramo. ¡No olviden que $r \gg d$!

Problema 3 (pág. 18). Este también es un problema sobre la adición de vectores. Para que sea más fácil comprender lo que resultará, conviene comenzar por el cálculo del campo en las direcciones



simétricas: a lo largo de los ejes x e y (véase la figura 72). Es imprescindible tener en cuenta que la distancia desde el punto de observación hasta el origen de coordenadas es mucho mayor que l.

Problema 4 (pág. 26). Primeramente escribamos las dimensiones de m_e, $\hbar$ y e:

$$[m_e] = g; \quad [\hbar] = g \cdot cm^2 s^{-1}; \quad [e] = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}.$$

Para convencernos de que no nos hemos equivocado al escribir las dimensiones, señalemos que, al multiplicar la frecuencia del fotón por $\hbar$, obtenemos su energía, y $-e^2/r$ es la energía potencial de la carga e en el campo de la carga $-e$ a una distancia r de ésta.

Tomemos la combinación de m_e, $\hbar$ y e en potencias arbitrarias: $m^s \hbar^t e^u$;

$$[m^s \hbar^t e^u] = g^s \left(\frac{g \cdot cm^2}{s}\right)^t \left(\frac{g^{1/2} cm^{3/2}}{s}\right)^u \equiv$$

$$\equiv g^{s+t+\frac{u}{2}} cm^{2t+\frac{3u}{2}} s^{-(t+u)}.$$

De acuerdo con la condición

$$s + t + \frac{u}{2} = 0; \quad t + u = 0; \quad 2t + \frac{3u}{2} = 1.$$

De aquí, $s = -1$, $t = 2$ y $u = -2$ en conformidad con lo expuesto en el problema.

Problema 5 (pág. 36). El producto vectorial $[AB]$ de dos vectores **A** y **B** es un vector con las componentes

$$[\mathbf{AB}]_x = A_y B_z - B_y A_z; \quad [\mathbf{AB}]_y = A_z B_x - A_x B_z;$$
$$[\mathbf{AB}]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Recuerden que el producto vectorial de los vectores colineales es igual a cero (¡compruébenlo!).

Empleando la regla de diferenciación del producto, tenemos:

$$\frac{d}{dt}[AB]_x = \frac{dA_y}{dt} B_z + A_y \frac{dB_z}{dt} - \frac{dA_z}{dt} B_y - A_z \frac{dB_y}{dt} =$$

$$= \left[\frac{dA}{dt} B\right]_x + \left[A \frac{dB}{dt}\right]_x, \text{ etc.},$$

para todas las componentes del producto vectorial. La última igualdad se basa en que las derivadas $d\mathbf{A}/dt$ y $d\mathbf{B}/dt$ son vectores con las componentes dA_x/dt, dB_x/dt, etc. Ahora se puede resolver el problema. Derivando $L = [pr]$, obtenemos $\frac{L}{dt} = \left[\frac{dp}{dt} r\right] + \left[p \frac{dr}{dt}\right]$. Puesto que $dp/dt = E$ y $F \parallel r$ (por la condición del problema, resulta que $[dp/dt, r] = 0$; $dr/dt = v$ y $v = p/m$, donde m es la masa de la partícula, es decir, también $[p\ dr/dt] = 0$. De este modo, $dL/dt = 0$, y, por consiguiente,

$$L = \text{const}.$$

Problema 6 (pág. 37). De acuerdo con la mecánica clásica, el momento de la cantidad de movimiento de una partícula de masa M, que se mueve con velocidad v describiendo una circunferencia de

radio R, es igual a MvR. La variación de L en la unidad significa la variación del momento de la cantidad de movimiento en una magnitud igual a la constante de Planck $\hbar$ (véase la fórmula (1.24)). De aquí

$$\Delta v = \hbar/MR = 10^{-27} \text{ cm/s } (¡!)$$

(por la condición del problema $M = 1$ g y $R = 1$ cm).

Problema 7 (pág. 41). Por definición (véase el texto), $\omega_H = \frac{eH}{2m_e c}$ y la longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega_H$, es decir,

$$\lambda = \frac{4\pi c^2 m_e}{eH} \quad \text{o bien} \quad \lambda_{(\text{cm})} \approx \frac{3 \cdot 10^4}{H_{(\text{oe})}} = \frac{3}{H_{(\text{T})}}$$

(1 tesla = 10^4 oerstedios).

Problema 8 (pág. 44). Al recorrer la distancia D (véase la fig. 14), el átomo de plata adquiere la componente vertical de la velocidad igual a

$$v_z = \frac{F_H D}{m_{Ag} v}.$$

La fuerza F_H viene dada por la fórmula (1.30) y v es la velocidad longitudinal de los átomos congregados. Las partículas recorren la distancia L por inercia, es decir, v_z/v no varía. En consecuencia,

$$\frac{d}{2L} = \frac{F_H D}{m_{Ag} v^2},$$

o bien,

$$L = \frac{d}{2} \, \frac{m_{Ag} v^2}{F_H D},$$

siendo m_{Ag} la masa del átomo de plata. Para poder sustituir los valores numéricos es necesario saber la proyección del momento magnético del átomo de plata sobre la dirección del campo magnético (véase la fórmula (1.30)). Y para conseguirlo se debe conocer la estructura electrónica del átomo de plata (véase el § 9). Señalemos, además, que $\frac{1}{2} m_{Ag} v^2 = k_B T_{\text{fuente}}$, donde T_{fuente} es la temperatura de la fuente de la cual salían (se evaporaban) los átomos de plata.

Problema 9 (pág. 55). Véanse las indicaciones en el texto del problema.

Problema 10 (pág. 71). Lo más sencillo es aprovechar el hecho de que $H^2/8\pi$ es la densidad de la energía, o sea, $V\frac{H^2}{2\pi}$ es la energía del campo magnético en el volumen V. Por consiguiente,

$$[H] = \frac{g^{1/2}}{g \cdot cm^{1/2}}.$$

Cerciorémonos de que no nos hemos equivocado: hallemos la dimensión de $\mathcal{M}$ utilizando la relación (1.11)

$$[\mathcal{M} V] = \left[\frac{e}{m_e c}\right] [L].$$

De aquí, debido a que $[V]=[r^3]$ y $[L]=[p][r]$,

$$[\mathcal{M}]=\left[\frac{e}{r^2}\right].$$

Si ahora utilizamos $[e]$ (véase el problema 4 en la pág. 26), obtendremos

$$[\mathcal{M}]=\frac{g^{1/2}}{s\cdot cm^{1/2}}=[H].$$

Problema 11 (pág. 84). Véase el problema 7 en la pág. 41.

Problema 12 (pág. 84). Con este fin es necesario aprovechar el valor de a que es igual, aproximadamente, a $\hbar^2/m_e e^2$ (véase la pág. 25) y el magnetón de Bohr $\mathcal{M}$ (véase el texto de la pág. 26).

Problema 13 (pág. 91). El valor medio de la proyección del momento magnético sobre el campo magnético H es igual a

$$\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{M}_a\frac{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta},$$

donde $x=\mathcal{M}_aH/k_BT$. Sustituyamos la variable de integración: $\cos\theta=z$ y prestemos atención a que el numerador es la derivada respecto a x del denominador. Por lo tanto, tenemos:

$$\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{M}_a\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-1}^{1}e^{xz}\,dz\right)\Big/\int\limits_{-1}^{1}e^{xz}\,dz.$$

Por cuanto

$$\int\limits_{-1}^{1}e^{xz}\,dz=\frac{1}{x}(e^x-e^{-x})\equiv\frac{2}{x}\operatorname{sh}x,$$

$$\frac{d\operatorname{sh}x}{dx}=\operatorname{ch}x,\quad \operatorname{ch}x/\operatorname{sh}x=\operatorname{cth}x,$$

se obtiene inmediatamente la fórmula (2.15').

A fin de deducir la fórmula (2.15), hay que saber cómo se comporta la $\operatorname{cth}x$ para un pequeño valor del argumento:

$$\operatorname{cth}x\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{3},\quad x\ll 1.$$

Introduciendo el valor de la $\operatorname{cth}x$ cuando $x\ll 1$ en (2.15'), obtenemos la fórmula (2.15).

Problema 14 (pág. 92). La fuerza de Lorentz (2.10) es perpendicular a la velocidad (véanse las explicaciones del problema 5 en la pág. 36) y, por consiguiente, su proyección sobre la trayectoria de la partícula es igual a cero.

Problema 15 (pág. 97). La energía total de las partículas del gas de Fermi cuando $T = 0$ es igual a

$$E_e = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2\hbar^3} m_e^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon$$

(véase la fórmula (2.19)).
De aquí

$$E_e = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2}V m_e^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \varepsilon_F^{5/2}.$$

Pero de acuerdo con la fórmula (2.20)

$$\frac{2\sqrt{2}V}{3\pi^2\hbar^3} m_e^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} = N_e.$$

En consecuencia

$$E_e = \frac{3}{5} N_e \varepsilon_F,$$

y

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E_e}{N_e} = \frac{3}{5} \varepsilon_F.$$

Problema 16 (pág. 99). Puede emplearse la fórmula (2.7) y el valor de T_{cuant} para los metales (véase la fórmula (2.17)).

Problema 17 (pág. 100). Para hacerlo es necesario tomar en consideración que $N_e \sim \frac{1}{a^3}$, donde a es el tamaño del átomo ($a \sim \hbar^2/m_e e^2$).

Problema 18 (pág. 107). El campo magnético no penetra en el superconductor. Al acercarse el imán al superconductor aumenta la densidad de las líneas magnéticas de fuerza entre ellos.

Problema 19 y 20 (págs. 116). Después de su lectura estos dos problemas pueden ser omitidos sin perjudicar la comprensión.

Problema 21 (pág. 125). El valor medio del parámetro η se halla de la condición del mínimo de energía libre F

$$\frac{dF}{d\eta} = [a(T - T_{\text{cr}}) + b\eta^2]\,\eta = 0.$$

Supongamos que tenemos a y b. Cuando $T > T_{\text{cr}}$, el mínimo se alcanza para $\bar{\eta} = 0$, y cuando $T > T_{\text{cr}}$, para $\bar{\eta} = \sqrt{\frac{a}{b}(T_{\text{cr}} - T)}$, es decir,

$$\bar{\eta} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}(T_{\text{cr}} - T)}, & T < T_{\text{cr}}, \\ 0 & T > T_{\text{cr}} \end{cases}$$

(es fácil comprobar que $d^2F/d\eta^2$ tiene el signo necesario para $\eta = \bar{\eta}$). Puesto que en el punto crítico, el parámetro $\bar{\eta}$ es continuo, resulta que, efectivamente, tiene lugar la transición de fase de segundo género.

Considerando que $\tilde{\eta} \equiv \mathcal{M}_s/N\mu$ y comparando con la fórmula (3.4), se puede establecer que $\frac{a}{b} T_{cr} = 3$.

Problema 22 (pág. 134). Para $H_z = 0$, de acuerdo con la fórmula (3.14'), tenemos:

$$\mathscr{E}_a = -V \left(\frac{1}{2} \beta \mathcal{M}^2 \cos^2 \vartheta + H_x \mathcal{M} \operatorname{sen} \vartheta \right);$$

las condiciones del mínimo (3.15) toman la forma:

$$(\beta \mathcal{M} \operatorname{sen} \vartheta - H_x) \cos \vartheta = 0, \qquad (1)$$

$$\beta \mathcal{M} (\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta) + H_x \operatorname{sen} \vartheta > 0. \qquad (2)$$

Para $H_x < \beta \mathcal{M}$ la ecuación (1) tiene dos soluciones:

$$\operatorname{sen} \vartheta = H_x/\beta \mathcal{M} \quad \text{y} \quad \cos \vartheta = 0.$$

La segunda no satisface la desigualdad (2). Por lo tanto, sólo queda la primera. La función $\mathscr{E}_a$ es mínima para $\vartheta = \operatorname{arcsen} (H_x/\beta \mathcal{M})$ y $\vartheta = \pi - \operatorname{arcsen} (H_x/\beta \mathcal{M})$. Los valores de la función $\mathscr{E}_a$ con tales valores del ángulo ϑ son, naturalmente, iguales:

$$\mathscr{E}_a = -V \beta \mathcal{M}^2 \left(1 + \frac{H_x^2}{\beta^2 \mathcal{M}^2} \right).$$

Como se indica en el texto «cuando . . . $H_x < \beta \mathcal{M}$ la curva $\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_a (\vartheta)$ tiene dos mínimos de igual profundidad».

Problema 23 (pág. 172). Comencemos por la fórmula (3.26). Si $pa/\hbar \ll 1$, los cosenos pueden descomponerse por las potencias del argumento:

$$\cos k_x a \approx 1 - \frac{1}{2} (k_x a)^2,$$

$$\cos k_y a \approx 1 - \frac{1}{2} (k_y a)^2,$$

$$\cos k_z a \approx 1 - \frac{1}{2} (k_z a)^2.$$

Puesto que $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \equiv p^2/\hbar^2$, resulta que

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2m^*},$$

donde $\varepsilon_0 = 2\mu H$, $m^* = \frac{\hbar^2}{2Aa^2}$ (véase la pág. 171).

Para deducir la fórmula (3.41), es decir, calcular el número total de magnones, es preciso hallar la densidad de los estados $g(\varepsilon)$ (véase la pág. 96). Al deducir la fórmula (2.19) desempeñó un papel importante la relación

$$4\pi p^2 \, dp \backsim \sqrt{\varepsilon} \, d\varepsilon,$$

la cual era el corolario de la ley «ordinaria» de dispersión $\varepsilon = p^2/2m$.

Partiendo de la fórmula antes citada, tenemos:

$$4\pi p^2 \, dp \backsim \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0} \, d\varepsilon.$$

Queda sustituir m_e por m^* y poner el valor de la masa efectiva; como resultado, obtenemos:

$$g(\varepsilon)=\frac{\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}}{4\pi^2 a^3 A^{3/2}}.$$

El cálculo se hizo con arreglo a la unidad de volumen del ferromagnético. El número total de magnones por unidad de volumen se calcula integrando respecto a todas las energías mayores que ε_0. La función $(e^{\varepsilon/kT}-1)^{-1}$ describe la completación de los estados con energía igual a ε. Puede y debe surgir la pregunta: «¿Por qué la energía puede descomponerse por potencias $p_x a/\hbar$ . . ., integrando después respecto a la energía hasta el infinito?». El hecho es que la aportación de los estados con energía $\varepsilon \gg k_B T$ es muy pequeña:

$$\frac{1}{e^{\varepsilon/k_B T}-1}\approx e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \quad \varepsilon \gg k_B T$$

Si $k_B T \ll A$ (que son precisamente las temperaturas que aquí analizamos), la aportación a la integral (3.41) la dan los estados con energía $\varepsilon \ll A$, a la descomposición de los cosenos es absolutamente admisible.

Problema 24 (pág. 173). Cada magnón lleva en sí un momento magnético «inverso» (con respecto a la magnetización cuando $T=0$) igual al magnetón de Bohr μ. A raíz de ello, de conformidad con (3.42),

$$\Delta\mathcal{M}_s=\mathcal{M}_s(0)-\mathcal{M}_s(T)\approx\frac{\mu}{8\pi^{3/2}a^3}\left(\frac{k_BT}{A}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon_0}{k_BT}}\sim$$

$$\sim\mathcal{M}_s(0)\left(\frac{k_BT}{A}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon_0}{k_BT}}.$$

Recuerden que $\mathcal{M}_s(0)\sim\mu/a^3$, véase la pág. 114). Si $T\gg\varepsilon_0$, el exponente puede sustituirse por la unidad. Y de acuerdo con la fórmula (3.5),

$$\Delta\mathcal{M}_s\sim\mathcal{M}_s(0)\,e^{-\frac{2T_c}{T}}.$$

Puesto que $k_B T_c\sim A$ (véase (3.11)) y $A\gg\varepsilon_0$, queda claro que la fórmula (3.42) describe una disminución mucho mayor de la magnetización en función de la temperatura, que la fórmula (3.5). Realicen las evaluaciones numéricas por su propia cuenta.

Problema 25 (pág. 173). Para $k_B T\ll\varepsilon_0$ la energía interna de los magnones contiene un exponente característico, gracias a la ranura en el espectro de energía:

$$E_{\mathrm{magn}}\sim e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}}.$$

El factor del exponente (¡éste existe!) que depende de la temperatura no reviste tanta importancia.

Problema 26 (pág. 177). Para determinar la parte fonónica de la capacidad calorífica es necesario calcular la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT} - 1}$$

con una precisión de hasta el factor numérico igual a la energía de los magnones. Al sustituir la variable de integración $\varepsilon \to k_BTx$, nos cercioramos de que la integral es proporcional a T^4, y la capacidad calorífica fonónica, a T^3 (véase la fórmula (3.48)).

Problema 27 (pág. 185). De acuerdo con la condición de Bragg — Wulff (4.1), la longitud de onda del neutrón debe ser menor que la distancia interatómica duplicada

$$\lambda < 2a.$$

Pero $\lambda = 2\pi\hbar/p$, donde p es el impulso del neutrón, es decir, debe cumplirse la condición

$$p > \frac{\pi\hbar}{a}.$$

Puesto que la energía $\varepsilon = p^2/2m_n$, donde m_n es la masa del neutrón, la condición de utilización posible de los neutrones para el análisis de la estructura del cristal adquiere la siguiente forma:

$$\varepsilon > \left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2 \frac{1}{2m_n} \sim \frac{\hbar^2}{a^2 m_e} \, \frac{m_e}{m_n} \sim 10^{-3}\varepsilon_{aT} \sim$$
$$\sim 10^{-14} \text{ ergios} \sim 1K;$$

$\varepsilon_{aT} \sim \hbar^2/a^2m_e$ es la energía atómica característica. Aunque la condición obtenida limita el nivel inferior de la energía, en realidad no pueden utilizarse neutrones con demasiada energía: su probabilidad de dispersión disminuye con el crecimiento de la energía. Por eso es necesario reducir la valocidad de los neutrones obtenidos en los reactores.

Problema 28 (pág. 189). Para la demostración es preciso analizar las desviaciones pequeñas de los momentos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ respecto a su supuesta posición no simétrica. Con la desviación hacia un lado, la energía aumenta, y con la desviación hacia otro lado, disminuye. Por consiguiente, ¡esto no es el mínimo!

Problema 29 (pág. 199). Véase la observación concerniente al problema 23 en la pág. 172.

Problema 30 (pág. 203). Al leer por primera vez este problema aconsejamos no resolverlo ya que es demasiado complejo.